

Équation de Schrödinger semi-classique avec potentiel harmonique et perturbation non-linéaire

Rémi Carles

Mathématiques Appliquées de Bordeaux et UMR 5466 CNRS
351 cours de la Libération
33 405 Talence cedex
carles@math.u-bordeaux.fr

1 Introduction

Soit l'équation de Schrödinger semi-classique avec potentiel harmonique isotrope,

$$(1.1) \quad \begin{cases} i\varepsilon\partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta v^\varepsilon = \frac{x^2}{2}v^\varepsilon, & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ v^\varepsilon|_{t=0} = f(x). \end{cases}$$

La solution de ce problème de Cauchy est donnée par

$$(1.2) \quad v^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{(2i\pi\varepsilon \sin t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\varepsilon \sin t} \left(\frac{x^2+y^2}{2} \cos t - x \cdot y \right)} f(y) dy =: U^\varepsilon(t) f(x).$$

Plusieurs types de perturbations linéaires du potentiel harmonique ont été étudiés (voir par exemple [Zel83], [Fuj80], [KRY97]). Des perturbations non-linéaires sont considérées en physique, pour la condensation de Bose-Einstein (voir [CT99]), où le potentiel harmonique est utilisé pour modéliser un confinement,

$$i\hbar\partial_t\psi^\hbar + \frac{1}{2}\hbar^2\Delta\psi^\hbar = \frac{x^2}{2}\psi^\hbar + Ng|\psi^\hbar|^2\psi^\hbar,$$

N désignant le nombre de particules et g une constante de couplage (en \hbar^2).

Nous nous intéressons ici au comportement asymptotique, lorsque ε tend vers zéro, de la solution du problème de Cauchy

$$(1.3) \quad \begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = \frac{x^2}{2}u^\varepsilon + \varepsilon^{n\sigma}|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon, & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = f(x) + r^\varepsilon(x), \end{cases}$$

où $\sigma > 1/n$ si $n = 1, 2$, et $\frac{2}{n+2} < \sigma < \frac{2}{n-2}$ si $n \geq 3$. Nous supposons que la perturbation r^ε de la donnée initiale est petite dans

$$(1.4) \quad \Sigma := H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}(H^1(\mathbb{R}^n)),$$

où la transformée de Fourier est définie par

$$\mathcal{F}v(\xi) = \widehat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} v(x) dx,$$

et que $f \in \Sigma$. L'espace Σ est muni de la norme

$$\|f\|_{\Sigma} = \|f\|_{L^2} + \|\nabla_x f\|_{L^2} + \|xf\|_{L^2},$$

et on suppose $\|r^\varepsilon\|_{\Sigma} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Le facteur d'atténuation $\varepsilon^{n\sigma}$ fait que la non-linéarité n'influence pas la *géométrie* de la propagation de u^ε : les rayons de l'optique géométrique sont les mêmes que dans le cas linéaire, à savoir des sinusoïdes (figure 1).

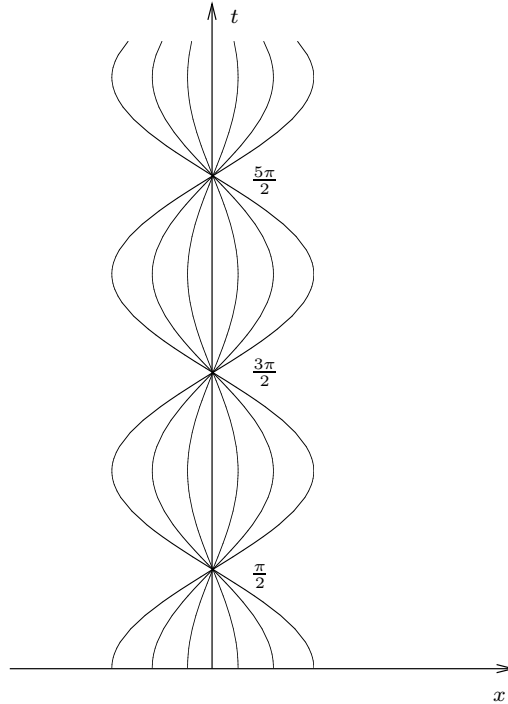


FIGURE 1 – Rayons de l'optique géométrique.

Dans un premier temps, nous décrivons le comportement asymptotique de u^ε pour $t \in [0, \pi]$, et nous nous restreignons au cas mono-dimensionnel pour ne pas alourdir l'énoncé. L'idée est la suivante : tant que u^ε reste de taille $O(1)$, le terme non-linéaire reste négligeable, le comportement asymptotique de u^ε est le même que celui de v^ε . Lorsque les rayons focalisent, l'amplitude de u^ε augmente (pour devenir un $O(\varepsilon^{-1/2})$) et le terme non-linéaire n'est plus négligeable. Par contre, la solution étant localisée près de l'origine (dans un voisinage de taille ε), le terme $x^2 u^\varepsilon$ devient négligeable. On a ainsi deux régimes distincts : un régime linéaire, où seul le premier terme du membre de droite de (1.3) joue un rôle, puis un régime non-linéaire, où c'est le second terme du membre de droite de (1.3) qui compte. La transition entre ces deux régimes a lieu dans une couche limite de taille $\Lambda\varepsilon$, pour $\Lambda \gg 1$.

Pour décrire la traversée du foyer à $t = \pi/2$, rappelons un résultat sur la diffusion non-linéaire. Notons U_0 le groupe unitaire de l'opérateur de Schrödinger, $U_0(t) = e^{i\frac{t}{2}\Delta}$.

La théorie de la diffusion compare le comportement de solutions de l'équation non-linéaire

$$(1.5) \quad i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta \psi = |\psi|^{2\sigma} \psi,$$

au comportement de solutions d'équations plus simples, typiquement des solutions d'équations libres. En dimension un d'espace, on sait (voir par exemple [Caz93]) que si $\sigma > 1$ et $\psi_- \in \Sigma$, il existe $\varphi \in \Sigma$ et ψ solution de (1.5) avec donnée initiale φ telles que

$$\|U_0(-t)\psi(t) - \psi_-\|_{\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0.$$

Si de plus $\sigma > \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ou si $\|\psi_-\|_{\Sigma}$ est suffisamment petite, alors il existe $\psi_+ \in \Sigma$ telle que

$$\|U_0(-t)\psi(t) - \psi_+\|_{\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

L'opérateur de diffusion S est alors défini par $\psi_+ = S\psi_-$. Définissons dans notre contexte l'état asymptotique ψ_- par

$$(1.6) \quad \psi_-(x) := \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \widehat{f}(x),$$

et nous supposons que $\psi_+ = S\psi_- \in \Sigma$.

Théorème 1.1 *Supposons $n = 1$. Soient $f, r^\varepsilon \in \Sigma$, et soit u^ε la solution de (1.3). On a alors l'asymptotique suivante, dans $L^2 \cap L^\infty$,*

- si $0 \leq t < \pi/2$, alors $u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{i}{2\pi \cos t}} \widehat{\psi}_-\left(\frac{-x}{\cos t}\right) e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon} \tan t}$;
- si $\pi/2 < t \leq \pi$, alors $u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{i}{2\pi \cos t}} \widehat{\psi}_+\left(\frac{-x}{\cos t}\right) e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon} \tan t}$, où $\psi_+ = S\psi_-$.

Remarque. Si au lieu de la non-linéarité $\varepsilon^{n\sigma}|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon$ nous considérons $\varepsilon^{n\sigma_1}|u^\varepsilon|^{2\sigma_2}u^\varepsilon$ avec $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ (pas d'hypothèse supplémentaire sur σ_2) et $n\sigma_1 > 1$, alors la solution v^ε du problème linéaire (1.1) serait une solution approchée de u^ε pour tout temps. Ainsi, l'échelle que nous considérons est critique quant à l'influence de la non-linéarité.

Remarque. En considérant une origine des temps à $t = \pi/2$, on peut rapprocher ce résultat de celui de [Nie96] (voir aussi [Nie95]). Dans ce papier, l'auteur considère le problème

$$(1.7) \quad \begin{cases} i\varepsilon\partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta v^\varepsilon = V(x)v^\varepsilon + U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v^\varepsilon, \\ v^\varepsilon|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \end{cases}$$

où U est un potentiel à courte portée. Le potentiel V dans ce cas ne peut être le potentiel harmonique, puisqu'il est borné ainsi que toutes ses dérivées. Sous des hypothèses ad hoc, l'influence de U a lieu près de $t = 0$ et est localisée près de l'origine, alors que seule la valeur $V(0)$ de V à l'origine apparaît dans ce régime. Pour des temps $\varepsilon \ll |t| < T_*$, la situation change : le potentiel U devient négligeable, alors que V dicte la propagation. Comme dans notre cas, la transition entre ces deux régimes est mesurée par l'opérateur de diffusion associé à U .

Notre hypothèse $\sigma > 1$ fait que le terme non-linéaire est à courte portée. Avec notre échelle, cette perturbation joue un rôle uniquement près du foyer, où le potentiel harmonique est négligeable, alors que la situation est inversée pour $\varepsilon \ll |t - \pi/2| \leq \pi/2$.

Sous cet angle, un point nouveau ici (en dehors du fait que nous considérons un problème non-linéaire) est que nous pouvons décrire la solution pour tout temps.

Grâce aux opérateurs J^ε et H^ε introduits au paragraphe 2, nous obtenons en fait une asymptotique plus précise que seulement $L^2 \cap L^\infty$, qui nous permet d'itérer le théorème 1.1.

Corollaire 1.2 *Supposons $n = 1$. Soient $f, r^\varepsilon \in \Sigma$ et u^ε la solution de (1.3). Il existe $\delta > 0$ tel que dans l'une ou l'autre des situations*

- $\sigma > \frac{1+\sqrt{17}}{4}$, ou
- $\|f\|_\Sigma \leq \delta$,

l'asymptotique suivante ait lieu. Soit $k \in \mathbb{N}^$. Alors le comportement de u^ε pour $\pi/2 + (k-1)\pi < t < \pi/2 + k\pi$ est donné, dans $L^2 \cap L^\infty$, par*

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} - ik\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi|\cos t|}} \widehat{S^k \psi_-} \left(\frac{-x}{\cos t} \right) e^{-i\frac{\pi}{2\varepsilon} \tan t},$$

où S^k représente la k -ième itérée de S (qui est bien définie sous nos hypothèses).

2 Asymptotique pour l'équation linéaire

Oublions un instant que le noyau de Schwartz de l'opérateur de Schrödinger avec potentiel harmonique est connu explicitement, et cherchons une solution de (1.1) sous la forme,

$$(2.1) \quad v_{\text{app}}^\varepsilon(t, x) = v_0(t, x) e^{i\varphi(t, x)/\varepsilon},$$

par la méthode BKW. La phase φ doit satisfaire l'équation eikonale,

$$(2.2) \quad \partial_t \varphi + \frac{1}{2} (\nabla_x \varphi)^2 = -\frac{x^2}{2},$$

et l'amplitude v_0 l'équation de transport,

$$(2.3) \quad \partial_t v_0 + \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x v_0 + \frac{1}{2} v_0 \Delta \varphi = 0.$$

En calculant les bicaractéristiques associées au problème, on trouve,

$$\varphi(t, x) = -\frac{x^2}{2} \tan t, \quad \text{et} \quad v_0(t, x) = \frac{1}{(\cos t)^{n/2}} f\left(\frac{x}{\cos t}\right).$$

La solution approchée $v_{\text{app}}^\varepsilon$ vérifie alors

$$(2.4) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t v_{\text{app}}^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta v_{\text{app}}^\varepsilon = \frac{x^2}{2} v_{\text{app}}^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 e^{i\varphi(t, x)/\varepsilon} \Delta v_0, \\ v_{\text{app}}^\varepsilon|_{t=0} = f(x). \end{cases}$$

Le reste $w^\varepsilon := v^\varepsilon - v_{\text{app}}^\varepsilon$ vérifie

$$(2.5) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta w^\varepsilon = \frac{x^2}{2} w^\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 e^{i\varphi(t, x)/\varepsilon} \Delta v_0, \\ w^\varepsilon|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

On a alors,

$$(2.6) \quad \varepsilon \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \varepsilon^2 \frac{1}{\cos^2 t} \|\Delta f\|_{L^2}.$$

Avec pour objectif l'étude d'un problème non-linéaire, il est naturel de chercher des estimations dans des espaces autres que L^2 . En particulier, en dimension un d'espace, on peut raisonnablement espérer des estimations L^∞ à partir d'estimations H^1 grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$(2.7) \quad \|f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x f\|_{L^2}^{1/2}.$$

En optique géométrique, il est classique d'estimer les ε -dérivées pour obtenir des estimations non-linéaires (voir par exemple [Rau95]). Cette approche prend en compte le fait qu'on travaille avec des solutions ε -oscillantes, mais ne recèle aucune information quant à la géométrie de la propagation. Un point particulier dans notre cas est que l'équation de Schrödinger non-linéaire (1.3) ne crée pas d'harmoniques : il n'y a donc qu'une phase à considérer (φ), et une géométrie bien précise. Dans le cas linéaire envisagé pour l'instant, ceci ne veut rien dire d'autre que contrôler $v_{\text{app}}^\varepsilon$ dans L^∞ équivaut à contrôler v_0 dans cet espace. L'injection (2.7) suggère alors l'introduction de l'opérateur

$$(2.8) \quad J^\varepsilon(t) = -i(\cos t)e^{i\varphi/\varepsilon}\nabla_x(e^{-i\varphi/\varepsilon}\cdot) = \frac{x}{\varepsilon} \sin t - i \cos t \nabla_x.$$

Étant donné que l'opérateur de Schrödinger avec potentiel harmonique fait tourner l'espace des phases à vitesse constante, introduisons également

$$(2.9) \quad H^\varepsilon(t) = x \cos t + i\varepsilon \sin t \nabla_x.$$

Ces deux opérateurs sont fondamentaux dans l'étude du problème (1.3). Donnons leurs principales propriétés.

Lemme 2.1 *Les opérateurs J^ε et H^ε vérifient les propriétés suivantes.*

– *La relation de commutation,*

$$(2.10) \quad \left[H^\varepsilon(t), i\varepsilon \partial_t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta - \frac{x^2}{2} \right] = \left[J^\varepsilon(t), i\varepsilon \partial_t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta - \frac{x^2}{2} \right] = 0.$$

– *Des inégalités de Gagliardo-Nirenberg modifiées. Pour $n = 1$ et $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,*

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \|w(t)\|_{L^\infty} &\leq \frac{C}{|\cos t|^{1/2}} \|w(t)\|_{L^2}^{1/2} \|J^\varepsilon(t)w(t)\|_{L^2}^{1/2}, \\ \|w(t)\|_{L^\infty} &\leq \frac{C}{|\varepsilon \sin t|^{1/2}} \|w(t)\|_{L^2}^{1/2} \|H^\varepsilon(t)w(t)\|_{L^2}^{1/2}. \end{aligned}$$

– *Pour toute fonction $F \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifiant la condition de jauge*

$$\exists G \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad F(z) = zG(|z|^2),$$

on a, pour $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$(2.12) \quad \begin{aligned} H^\varepsilon(t)F(w) &= \partial_z F(w)H^\varepsilon(t)w - \partial_{\bar{z}} F(w)\overline{H^\varepsilon(t)w}, \\ J^\varepsilon(t)F(w) &= \partial_z F(w)J^\varepsilon(t)w - \partial_{\bar{z}} F(w)\overline{J^\varepsilon(t)w}. \end{aligned}$$

Remarque. Il existe un analogue multidimensionnel aux inégalités (2.11), que nous n'écrivons pas ici.

Remarque. Les opérateurs J^ε et H^ε sont connus en mécanique quantique, ce sont des observables de Heisenberg (transformations métaplectiques, voir [GS84], [Fol89]),

$$(2.13) \quad J^\varepsilon(t) = U^\varepsilon(t)(-i\nabla_x)U^\varepsilon(-t)$$

$$(2.14) \quad = U^\varepsilon\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{\varepsilon} U^\varepsilon\left(\frac{\pi}{2} - t\right),$$

$$(2.15) \quad H^\varepsilon(t) = U^\varepsilon(t)xU^\varepsilon(-t)$$

$$(2.16) \quad = U^\varepsilon\left(t - \frac{\pi}{2}\right) (i\varepsilon\nabla_x) U^\varepsilon\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Les relations de commutation (2.10) sont alors des conséquences directes des relations de conjugaison (2.13) et (2.15). Les égalités entre (2.13) et (2.14) d'une part, (2.15) et (2.16) d'autre part, sont dues au fait que l'oscillateur harmonique fait tourner l'espace des phases à vitesse 1. Il est facile de vérifier que les inégalités de Gagliardo-Nirenberg (2.11) sont des conséquences de (2.14), (2.15) et de l'estimation

$$\|U^\varepsilon(t)f\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{(\varepsilon|\sin t|)^{1/2}} \|f\|_{L^1}.$$

Le point le plus remarquable est sans doute que dans le cas du potentiel harmonique, on peut estimer de façon simple l'action de ces observables de Heisenberg sur une large famille de non-linéarités, selon (2.12).

On a facilement le résultat suivant, en notant

$$(2.17) \quad \mathcal{H} := \{f \in H^3(\mathbb{R}), \text{ vérifiant } xf \in H^2(\mathbb{R})\}.$$

Proposition 2.2 *Soit $f \in \mathcal{H}$. Alors il existe une constante $C = C(\|f\|_{H^3}, \|xf\|_{H^2})$ telle que le reste $v^\varepsilon - v_{\text{app}}^\varepsilon$ satisfasse, pour $0 \leq t < \pi/2$,*

$$\begin{aligned} & \|(v^\varepsilon - v_{\text{app}}^\varepsilon)(t)\|_{L^2} + \|J^\varepsilon(v^\varepsilon - v_{\text{app}}^\varepsilon)(t)\|_{L^2} + \|H^\varepsilon(v^\varepsilon - v_{\text{app}}^\varepsilon)(t)\|_{L^2} \leq \\ & \leq C \left(\varepsilon \int_0^t \frac{ds}{\cos^2 s} + \frac{\varepsilon^2}{\cos^2 t} \right). \end{aligned}$$

Par densité, on a aussi,

Corollaire 2.3 *Soit $f \in \Sigma$. Alors,*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon} \|A^\varepsilon(t) (v^\varepsilon - v_{\text{app}}^\varepsilon)(t)\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

où $A^\varepsilon(t)$ désigne l'un quelconque des opérateurs Id , $J^\varepsilon(t)$ ou $H^\varepsilon(t)$.

3 Preuve du théorème 1.1

On montre facilement que la solution de (1.3) est bien définie pour tout temps et appartient à Σ . Elle vérifie en outre

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} &= \|u^\varepsilon(0)\|_{L^2} = O(1), \\ E^\varepsilon(t) &:= \frac{1}{2} \|\varepsilon \partial_x u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{2} |u^\varepsilon(t, x)|^2 dx + \frac{\varepsilon^\sigma}{\sigma + 1} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \\ &= E^\varepsilon(0) = O(1). \end{aligned}$$

3.1 Propagation avant le premier foyer

D'après le corollaire 2.3, l'asymptotique du théorème 1.1 pour $0 \leq t < \pi/2$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soient $f, r^\varepsilon \in \Sigma$. Alors*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon} \|A^\varepsilon(t)(u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t))\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

où $A^\varepsilon(t)$ est l'un quelconque des opérateurs Id , $J^\varepsilon(t)$ ou $H^\varepsilon(t)$.

Preuve : notons $w^\varepsilon = u^\varepsilon - v^\varepsilon$. Ce reste vérifie

$$(3.2) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 w^\varepsilon = \frac{x^2}{2} w^\varepsilon + \varepsilon^\sigma |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon, \\ w^\varepsilon|_{t=0} = r^\varepsilon. \end{cases}$$

On a immédiatement,

$$\varepsilon \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq 2\varepsilon^\sigma \| |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon(t) \|_{L^2} \leq 2\varepsilon^\sigma \|u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^{2\sigma} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}.$$

Puisque la norme L^2 de u^ε est conservée au cours du temps, il s'agit d'estimer u^ε dans L^∞ , ce que nous permet l'inégalité (2.11). D'après les relations

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}, \text{ et } \|J^\varepsilon(t)v^\varepsilon\|_{L^2} = \|f'\|_{L^2},$$

on a en effet

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|\cos t|^{1/2}} \|f\|_{L^2}^{1/2} \|f'\|_{L^2}^{1/2} =: \frac{C_0}{|\cos t|^{1/2}}.$$

On a $w^\varepsilon|_{t=0} = r^\varepsilon$, donc pour ε petit,

$$\|w^\varepsilon|_{t=0}\|_{L^\infty} < C_0.$$

Tant que

$$(3.3) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_0}{|\cos t|^{1/2}},$$

on peut contrôler $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}$. On montre précisément que pour $0 \leq t \leq \pi/2 - \Lambda\varepsilon$,

$$(3.4) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|\cos t|^{1/2}} \left(\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\pi}{2} - t} \right)^{\frac{\sigma-1}{2}} + o(1) \right),$$

où C ne dépend pas de $\Lambda \geq 1$. Donc si ε est suffisamment petit et Λ suffisamment grand, alors (3.3) reste vraie jusqu'au temps $t = \pi/2 - \Lambda\varepsilon$. Lorsque l'estimation (3.3) est valable, on a

$$\varepsilon \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq 2\varepsilon^\sigma \frac{(2C_0)^{2\sigma}}{|\cos t|^\sigma} \|f\|_{L^2}.$$

En intégrant, il vient,

$$(3.5) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\frac{\pi}{2} - t} \right)^{\sigma-1} + \|r^\varepsilon\|_{L^2}.$$

En appliquant J^ε à (3.2), on a de même,

$$(3.6) \quad \varepsilon \partial_t \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon^\sigma}{|\cos t|^\sigma} (\|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}),$$

et d'après le lemme de Gronwall,

$$(3.7) \quad \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\frac{\pi}{2} - t} \right)^{\sigma-1} + C \|\partial_x r^\varepsilon\|_{L^2}.$$

Avec (3.5) et (3.7), on obtient (3.4), grâce à (2.11). La dernière partie de la proposition, concernant $H^\varepsilon u^\varepsilon$, se déduit alors facilement. \square

3.2 Transition entre les deux régimes

Dans ce paragraphe, nous donnons l'heuristique de la transition entre les régimes linéaire et non-linéaire, puis nous énonçons le résultat rigoureux sans le démontrer ici.

Pour des temps voisins de $\pi/2$, on attend une solution approchée \tilde{v}^ε vérifiant

$$i\varepsilon \partial_t \tilde{v}^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 \tilde{v}^\varepsilon = \varepsilon^\sigma |\tilde{v}^\varepsilon|^{2\sigma} \tilde{v}^\varepsilon.$$

D'après la proposition 3.1, il s'agit alors de raccorder \tilde{v}^ε à v^ε . Avec en tête les résultats de [Car00], on peut s'attendre à l'existence d'un profil de concentration,

$$(3.8) \quad \tilde{v}^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi \left(\frac{t - \frac{\pi}{2}}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

La fonction ψ doit être choisie de sorte que \tilde{v}^ε et $v_{\text{app}}^\varepsilon$ se raccordent pour $t = \pi/2 - \Lambda\varepsilon$ et Λ grand. Cette stratégie est la même que celle employée dans [BG99] (voir aussi [BG97], [GG01]).

Notons $t_*^\varepsilon = \pi/2 - \Lambda\varepsilon$, et supposons désormais $\Lambda > 1$. Pour Λ grand, les propositions 2.2 et 3.1 entraînent,

$$u^\varepsilon(t_*^\varepsilon, x) \sim v^\varepsilon(t_*^\varepsilon, x) \sim v_{\text{app}}^\varepsilon(t_*^\varepsilon, x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(\Lambda\varepsilon)}} f \left(\frac{x}{\sin(\Lambda\varepsilon)} \right) e^{-i \frac{x^2}{2\varepsilon \tan(\Lambda\varepsilon)}}.$$

Pour $\Lambda\varepsilon$ proche de zéro,

$$\frac{1}{\sqrt{\sin(\Lambda\varepsilon)}} f \left(\frac{x}{\sin(\Lambda\varepsilon)} \right) e^{-i \frac{x^2}{2\varepsilon \tan(\Lambda\varepsilon)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\Lambda\varepsilon}} f \left(\frac{x}{\Lambda\varepsilon} \right) e^{-i \frac{x^2}{2\varepsilon(\Lambda\varepsilon)}},$$

et d'après (3.8), ceci doit également être proche de

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi \left(-\Lambda, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

D'après la théorie de la diffusion,

$$\psi(-\Lambda, x) \underset{\Lambda \rightarrow +\infty}{\sim} U_0(-\Lambda) \psi_-(x).$$

On doit donc avoir

$$(3.9) \quad \frac{1}{\sqrt{\Lambda\varepsilon}} f \left(\frac{x}{\Lambda\varepsilon} \right) e^{-i \frac{x^2}{2\varepsilon(\Lambda\varepsilon)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (U_0(-\Lambda) \psi_-) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Le symbole “ \sim ” signifie ici qu’on prend à la fois ε petit et Λ grand avec $\Lambda\varepsilon$ qui tend vers zéro. Un argument de phase stationnaire permet alors d’aboutir à la relation

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \widehat{f},$$

c’est-à-dire la formule annoncée en introduction (1.6). L’énoncé précis de cet argument heuristique est le suivant.

Proposition 3.2 *Soient $f, r^\varepsilon \in \Sigma$, et ψ_- défini par (1.6). Alors,*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u^\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon, \cdot \right) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (U_0(-\Lambda)\psi_-) \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

et il en est de même en appliquant l’un ou l’autre des opérateurs $J^\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon \right)$ ou $H^\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon \right)$ aux fonctions considérées.

3.3 Description de la traversée de caustique

Comme annoncé dans l’introduction, pour des temps voisins de $\pi/2$, la solution u^ε est localisée près de l’origine, si bien que le terme $x^2 u^\varepsilon$ est négligeable devant les autres dans (1.3). Pour le vérifier, introduisons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{supp } \chi \subset [-2, 2], \quad 0 \leq \chi \leq 1 \text{ et } \forall x \in [-1, 1], \chi(x) = 1.$$

Pour $R > 0$, posons

$$u_R^\varepsilon(t, x) = \chi \left(\frac{x}{R} \right) u^\varepsilon(t, x).$$

Lemme 3.3 *Soit $f \in \mathcal{H}$ et prenons $R = \varepsilon^\alpha$. Alors pour tout $0 < \alpha < 1$,*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2} + \Lambda\varepsilon} \|A^\varepsilon(t)(u^\varepsilon(t) - u_R^\varepsilon(t))\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

où $A^\varepsilon(t)$ est l’un quelconque des opérateurs Id , $J^\varepsilon(t)$ ou $H^\varepsilon(t)$.

Preuve : la fonction u_R^ε satisfait,

$$\left(i\varepsilon \partial_t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 - \frac{x^2}{2} \right) u_R^\varepsilon = \varepsilon^\sigma |u^\varepsilon|^{2\sigma} u_R^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2R} \chi' \left(\frac{x}{R} \right) \partial_x u^\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)^2 \chi'' \left(\frac{x}{R} \right) u^\varepsilon,$$

donc $w_R^\varepsilon := u^\varepsilon - u_R^\varepsilon$ vérifie,

$$\left(i\varepsilon \partial_t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 - \frac{x^2}{2} \right) w_R^\varepsilon = \varepsilon^\sigma |u^\varepsilon|^{2\sigma} w_R^\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2R} \chi' \left(\frac{x}{R} \right) \partial_x u^\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)^2 \chi'' \left(\frac{x}{R} \right) u^\varepsilon.$$

On a alors

$$\varepsilon \partial_t \|w_R^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon}{R} \|\varepsilon \partial_x u^\varepsilon(t)\|_{L^2} + C \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)^2 \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2},$$

ce qui implique, d’après les lois de conservation (3.1),

$$\varepsilon \partial_t \|w_R^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon}{R} + C \left(\frac{\varepsilon}{R} \right)^2.$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon, \frac{\pi}{2} + \Lambda\varepsilon]$, il vient

$$\sup_{\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2} + \Lambda\varepsilon} \|w_R^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|w_R^\varepsilon(\pi/2 - \Lambda\varepsilon)\|_{L^2} + C\Lambda \frac{\varepsilon}{R} + C\Lambda \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2.$$

Si $R = \varepsilon^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, alors,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2} + \Lambda\varepsilon} \|w_R^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_R^\varepsilon(\pi/2 - \Lambda\varepsilon)\|_{L^2}.$$

Puisque $\psi_- \in L^2$, l'hypothèse $0 < \alpha < 1$ entraîne, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\left\| \left(1 - \chi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon^\alpha}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (U_0(-\Lambda)\psi_-) \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

La première partie du lemme 3.3 découle alors de la proposition 3.2. Nous ne détaillons pas ici le cas des deux autres opérateurs. \square

Il s'agit maintenant de comparer \tilde{v}^ε et u_R^ε .

Lemme 3.4 *Soient $f \in \mathcal{H}$ et $R = \varepsilon^\alpha$. Si $0 < \alpha < 1$, alors*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2} + \Lambda\varepsilon} \|A^\varepsilon(t)(u_R^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t))\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

où $A^\varepsilon(t)$ est l'un quelconque des opérateurs Id , $J^\varepsilon(t)$ ou $H^\varepsilon(t)$.

Preuve : notons $\tilde{w}_R^\varepsilon = u_R^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon$. En remarquant qu'avec notre définition de χ on a,

$$\chi\left(\frac{x}{R}\right) = \chi\left(\frac{x}{2R}\right) \chi\left(\frac{x}{R}\right),$$

il vient

$$\left(i\varepsilon\partial_t + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2\right) u_R^\varepsilon = V_R(x)u_R^\varepsilon + \varepsilon^\sigma |u^\varepsilon|^{2\sigma} u_R^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2R} \chi'\left(\frac{x}{R}\right) \partial_x u^\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \chi''\left(\frac{x}{R}\right) u^\varepsilon,$$

où le potentiel

$$V_R(x) = \chi\left(\frac{x}{2R}\right) \frac{x^2}{2},$$

est maintenant borné à dérivées bornées,

$$(3.10) \quad \|V_R^{(n)}\|_{L^\infty} \leq C_n R^{2-n}.$$

Le reste \tilde{w}_R^ε vérifie,

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \left(i\varepsilon\partial_t + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2\right) \tilde{w}_R^\varepsilon &= V_R(x)u_R^\varepsilon + \varepsilon^\sigma (|u^\varepsilon|^{2\sigma} u_R^\varepsilon - |\tilde{v}^\varepsilon|^{2\sigma} \tilde{v}^\varepsilon) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2R} \chi'\left(\frac{x}{R}\right) \partial_x u^\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \chi''\left(\frac{x}{R}\right) u^\varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\varepsilon\partial_t \|\tilde{w}_R^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C \left(R^2 + \frac{\varepsilon}{R} + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \right) + C\varepsilon^\sigma \| |u^\varepsilon|^{2\sigma} u_R^\varepsilon - |\tilde{v}^\varepsilon|^{2\sigma} \tilde{v}^\varepsilon \|_{L^2}.$$

Avec $R = \varepsilon^\alpha$ et $0 < \alpha < 1$, le premier terme du membre de droite est petit. Pour le dernier terme, écrivons

$$\begin{aligned} \left\| |u^\varepsilon|^{2\sigma} u_R^\varepsilon - |\tilde{v}^\varepsilon|^{2\sigma} \tilde{v}^\varepsilon \right\|_{L^2} &\leq \left\| |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon - |\tilde{v}^\varepsilon|^{2\sigma} \tilde{v}^\varepsilon \right\|_{L^2} + \left\| \left(1 - \chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right) |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon \right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{C}{(\varepsilon + |t - \pi/2|)^\sigma} \|u^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{L^2} + \frac{C}{(\varepsilon + |t - \pi/2|)^\sigma} \|w_R^\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq \frac{C}{(\varepsilon + |t - \pi/2|)^\sigma} \|\tilde{w}_R^\varepsilon\|_{L^2} + 2\frac{C}{(\varepsilon + |t - \pi/2|)^\sigma} \|w_R^\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\varepsilon \partial_t \|\tilde{w}_R^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C \left(R^2 + \frac{\varepsilon}{R} + \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \right) + C \frac{\varepsilon^\sigma}{(\varepsilon + |t - \pi/2|)^\sigma} (\|\tilde{w}_R^\varepsilon\|_{L^2} + \|w_R^\varepsilon\|_{L^2}).$$

D'après la proposition 3.2 et le lemme 3.3,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{w}_R^\varepsilon(\pi/2 - \Lambda\varepsilon)\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Le lemme de Gronwall et le lemme 3.3 fournissent alors la première partie du lemme 3.4 (avec $A^\varepsilon = Id$). Nous ne détaillons pas ici les autres calculs. \square

Finalement, l'hypothèse $f \in \mathcal{H}$ est remplacée par l'hypothèse de travail $f \in \Sigma$ par un argument de stabilité pour les équations de Schrödinger non-linéaires. On conclut alors,

Proposition 3.5 *Soient $f, r^\varepsilon \in \Sigma$. La différence $u^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon$ est petite près du premier foyer :*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\frac{\pi}{2} - \Lambda\varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2} + \Lambda\varepsilon} \|A^\varepsilon(t) (u^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t))\|_{L^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

où $A^\varepsilon(t)$ est l'un quelconque des opérateurs Id , $J^\varepsilon(t)$ ou $H^\varepsilon(t)$.

3.4 Propagation après le premier foyer

Grâce aux opérateurs J^ε et H^ε , la situation est parfaitement symétrique pour $t > \pi/2$. La fin de la preuve du théorème 1.1 reprend donc les étapes précédentes.

Par ailleurs, nous nous sommes placés dans des hypothèses (sur f ou σ) telles que la situation à l'instant $t = \pi$ est exactement la même qu'à l'instant initial, à ceci près que la fonction ψ_- est remplacée par ψ_+ (qui est aussi dans Σ), et la perturbation r^ε est évidemment différente, mais vérifie les mêmes propriétés qu'à l'instant initial. On peut donc itérer le théorème 1.1 pour obtenir le corollaire 1.2.

Remarque. Cas multi-dimensionnel. Quand $n \geq 2$, on ne peut plus obtenir des estimations L^∞ à partir d'informations dans H^1 . Par contre, les termes non-linéaires sont contrôlés à l'aide d'estimations de Strichartz. Le point clé consiste à remarquer que puisque nous travaillons toujours sur des intervalles de temps bornés, on a les *mêmes* inégalités de Strichartz pour (1.1) avec ou sans potentiel harmonique.

Références

[BG97] H. Bahouri, P. Gérard, *Optique géométrique généralisée pour les ondes non linéaires critiques*, Séminaire X-EDP, 1996–1997, Exp. No. VIII.

- [BG99] H. Bahouri, P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, Amer. J. Math., **121** (1999), 131–175.
- [Car00] R. Carles, *Geometric optics with caustic crossing for some nonlinear Schrödinger equations*, Indiana Univ. Math. J., **49**, vol. 2 (2000), 475–551.
- [Caz93] T. Cazenave, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, Univ. Fed. Rio de Jan., 1993, Text. Met. Mat. **26**.
- [CT99] C. Cohen-Tannoudji, *Cours du Collège de France*, 1998–99, disponible à www.lkb.ens.fr/~laloe/PHYS/cours/college-de-france/
- [Fol89] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Annals of Mathematics Studies, 122, Princeton University Press, 1989.
- [Fuj80] D. Fujiwara, *Remarks on the convergence of the Feynman path integrals*, Duke Math. J., **47** (1980), no. 3, 559–600.
- [KRY97] L. Kapitanski, I. Rodnianski, K. Yajima, *On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **9** (1997), no. 1, 77–106.
- [GG01] I. Gallagher, P. Gérard, *Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle*, J. Math. Pures Appl. (9), **80** (2001), no. 1, 1–49.
- [GS84] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, 1984.
- [Nie95] F. Nier, *Une description semi-classique de la diffusion quantique*, Séminaire X-EDP, 1994–1995, Exp. No. VIII.
- [Nie96] F. Nier, *A semi-classical picture of quantum scattering*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **29** (1996), no. 2, 149–183.
- [Rau95] J. Rauch, *Lectures on Geometric Optics*, 1995, disponible à www.math.lsa.umich.edu/~rauch
- [Zel83] S. Zelditch, *Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger's equation*, Comm. Math. Phys., **90** (1983), no. 1, 1–26.