Mesurer l'infini

Rémi Carles

CNRS & Univ. Rennes

Y a-t-il un infini ?

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.

Albert Einstein

- L'infini existe. . .en maths !
- Il n'y a en pas qu'un.
- Il y en a même une infinité . . .laquelle ?

Y a-t-il un infini ?

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.

Albert Einstein

- L'infini existe. . .en maths !
- Il n'y a en pas qu'un.
- Il y en a même une infinité . . .laquelle ?

Y a-t-il un infini ?

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.

Albert Einstein

- L'infini existe. . .en maths !
- Il n'y a en pas qu'un.
- Il y en a même une infinité . . .laquelle ?

Y a-t-il un infini ?

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.

Albert Einstein

- L'infini existe. . .en maths !
- Il n'y a en pas qu'un.
- Il y en a même une infinité . . .laquelle ?

Y a-t-il un infini ?

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.

Albert Einstein

- L'infini existe. . .en maths !
- Il n'y a en pas qu'un.
- Il y a en a même une infinité . . .laquelle ?

Y a-t-il un infini ?

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.

Albert Einstein

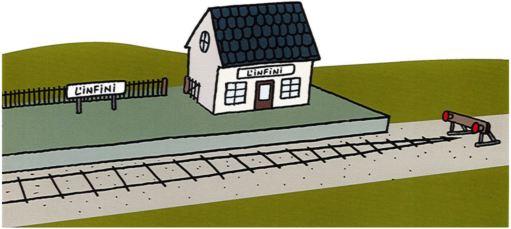
- L'infini existe. . .en maths !
- Il n'y a en pas qu'un.
- Il y en a même une infinité . . .laquelle ?

Y a-t-il un infini ?

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.

Albert Einstein

- L'infini existe. . .en maths !
- Il n'y a en pas qu'un.
- Il y en a même une infinité . . .laquelle ?



©Philippe Geluck

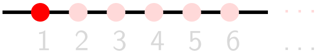
L'infini : deux approches possibles (au moins)

- Infini numérique : compter, mesurer des ensembles (de nombres).
- Infini géométrique : mesurer la dimension d'un objet infini.

L'infini : deux approches possibles (au moins)

- Infini numérique : compter, mesurer des ensembles (de nombres).
- Infini géométrique : mesurer la dimension d'un objet infini.

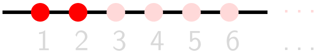
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

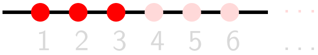
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

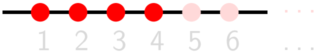
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

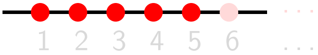
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

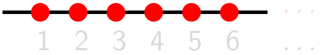
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

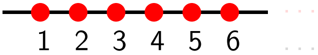
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

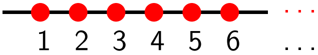
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

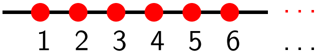
Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

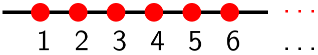
Compter jusqu'à l'infini



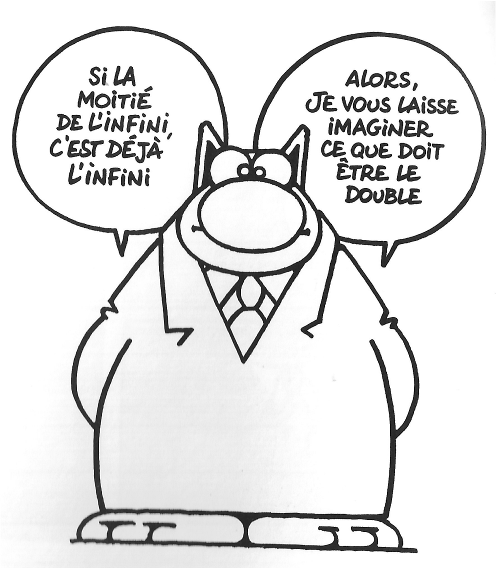
On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.

Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.

Compter jusqu'à l'infini



On peut compter sans jamais s'arrêter : il existe une infinité de nombres entiers.
Comme on peut compter les éléments, on parle d'infini dénombrable.



©Philippe Geluck

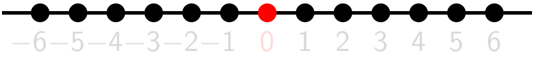
D'autres infinis. . .vraiment ?

Ensemble des entiers (naturels) pairs : autant que d'entiers naturels ($2\mathbb{N}$).
Ensemble des entiers (naturels) impairs : encore autant ($2\mathbb{N}+1$).

Ensemble des entiers relatifs : deux fois plus que d'entiers naturels, mais c'est le même infini.

D'autres infinis. . .vraiment ?

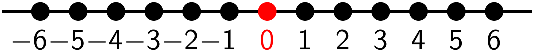
Ensemble des entiers (naturels) pairs : autant que d'entiers naturels ($2\mathbb{N}$).
Ensemble des entiers (naturels) impairs : encore autant ($2\mathbb{N}+1$).



Ensemble des entiers relatifs : deux fois plus que d'entiers naturels, mais c'est le même infini.

D'autres infinis. . .vraiment ?

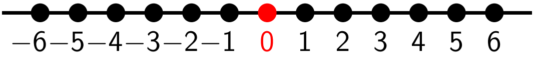
Ensemble des entiers (naturels) pairs : autant que d'entiers naturels ($2\mathbb{N}$).
Ensemble des entiers (naturels) impairs : encore autant ($2\mathbb{N}+1$).



Ensemble des entiers relatifs : deux fois plus que d'entiers naturels, mais c'est le même infini.

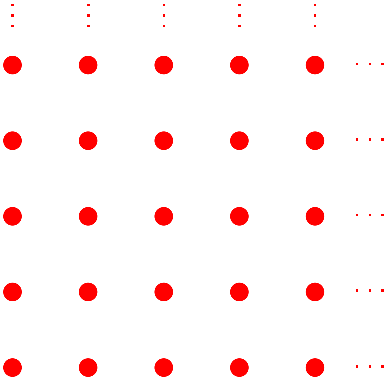
D'autres infinis. . .vraiment ?

Ensemble des entiers (naturels) pairs : autant que d'entiers naturels ($2\mathbb{N}$).
Ensemble des entiers (naturels) impairs : encore autant ($2\mathbb{N}+1$).

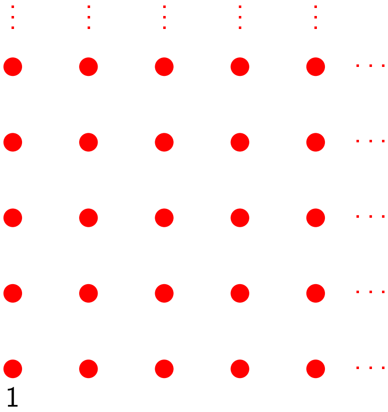


Ensemble des entiers relatifs : deux fois plus que d'entiers naturels, mais c'est le même infini.

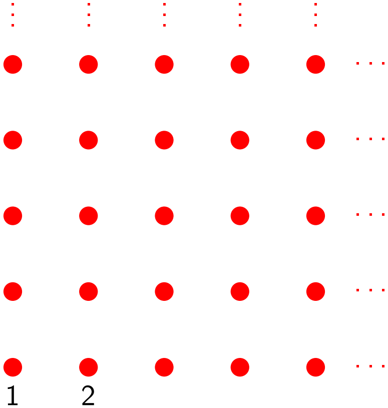
Et cette fois-ci ?



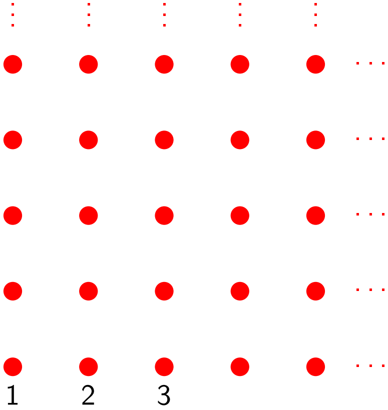
Et cette fois-ci ?



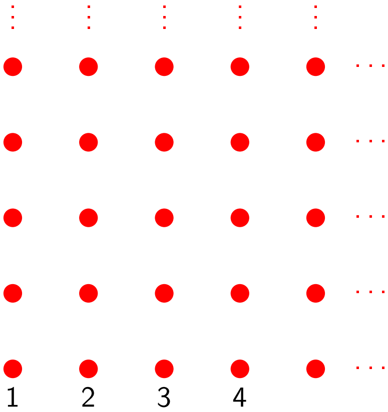
Et cette fois-ci ?



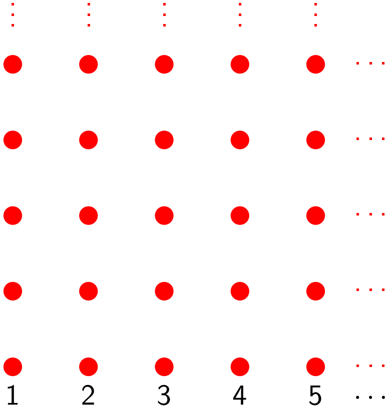
Et cette fois-ci ?



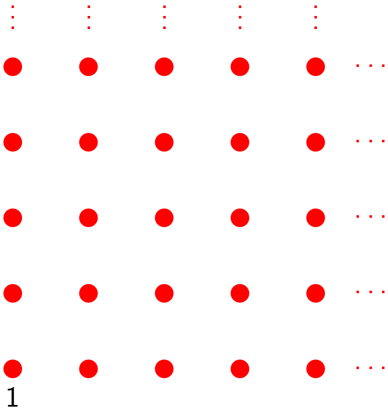
Et cette fois-ci ?



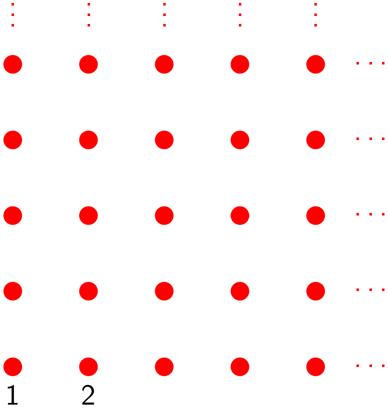
Et cette fois-ci ?



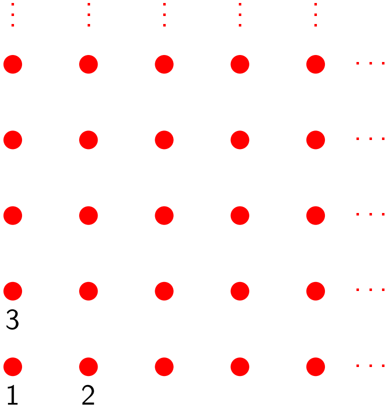
Et cette fois-ci ?



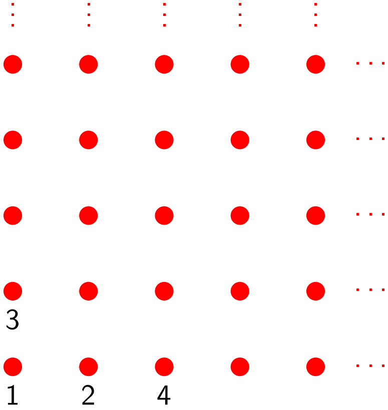
Et cette fois-ci ?



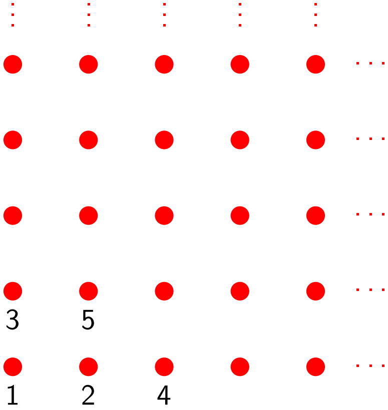
Et cette fois-ci ?



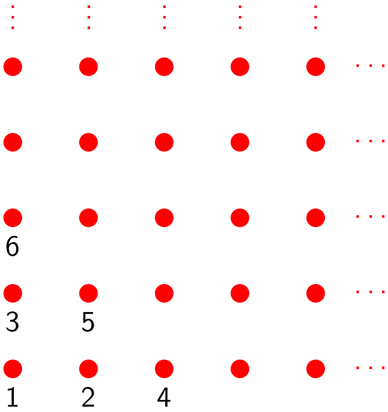
Et cette fois-ci ?



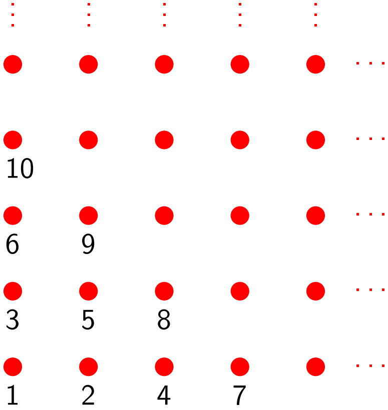
Et cette fois-ci ?



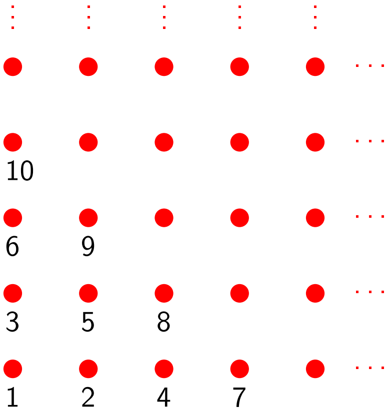
Et cette fois-ci ?



Et cette fois-ci ?

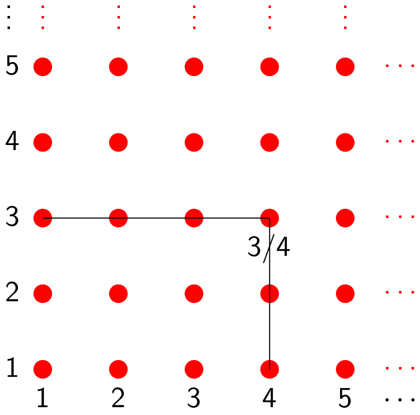


Et cette fois-ci ?



On compte ainsi l'ensemble des fractions rationnelles : $\frac{p}{q}$, avec p et q des entiers naturels.

Et cette fois-ci ?

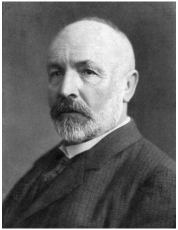


On compte ainsi l'ensemble des fractions rationnelles : $\frac{p}{q}$, avec p et q des entiers naturels.

Il y a autant de rationnels que d'entiers.

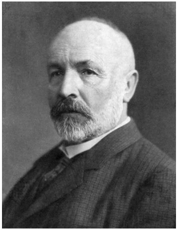
Mais alors, un seul infini ?

Mais alors, un seul infini ?



Georg Cantor (1846-1918)

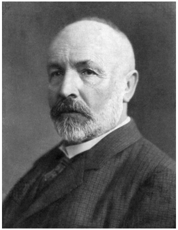
Mais alors, un seul infini ?



Georg Cantor (1846-1918)

Non : il existe plusieurs infinis.

Mais alors, un seul infini ?

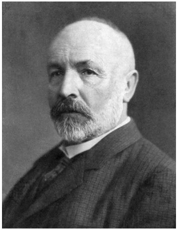


Georg Cantor (1846-1918)

Non : il existe plusieurs infinis.

« Rappel » : il existe des nombres qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}$, π,...).

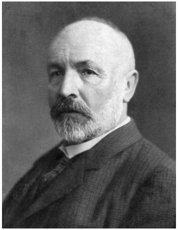
Mais alors, un seul infini ?



Georg Cantor (1846-1918)

Non : il existe plusieurs infinis.
« Rappel » : il existe des nombres qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}$, π,...).
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (appelé aussi « droite réelle ») est plus grand que l'ensemble des nombres entiers : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Mais alors, un seul infini ?



Georg Cantor (1846-1918)

Non : il existe plusieurs infinis.
« Rappel » : il existe des nombres qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}$, π,...).
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (appelé aussi « droite réelle ») est plus grand que l'ensemble des nombres entiers : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
Dans sa démonstration, Cantor prouve que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.
En fait, $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$ ont « même taille »...

$]0,1[$ n'est pas dénombrable : preuve par l'absurde

Supposons qu'on puisse compter les nombres de $]0,1[$: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
Écrivons le développement décimal de chacun de ces nombres :

$$u_1 = 0,\boxed{1}236544\dots$$
$$u_2 = 0,5\boxed{6}76568\dots$$
$$u_3 = 0,22\boxed{0}564574\dots$$
$$u_4 = 0,436\boxed{5}02359\dots$$

Pour chaque nombre u_n, on ne considère que sa $n^{\text{ième}}$ décimale :

- si elle vaut 1, on la remplace par 2 ;
- si elle ne vaut pas 1, on la remplace par 1.

On construit ainsi un nombre x :

$$x = 0,2111\cdots$$

Par construction, $x \neq u_n$ pour tous les n : absurde. □

Ce procédé dû à Cantor, repris depuis dans d'autres contextes, porte le nom de procédé diagonal.

$]0,1[$ n'est pas dénombrable : preuve par l'absurde

Supposons qu'on puisse compter les nombres de $]0,1[$: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
Écrivons le développement décimal de chacun de ces nombres :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,\boxed{1}236544\dots \\ u_2 &= 0,5\boxed{6}76568\dots \\ u_3 &= 0,22\boxed{0}564574\dots \\ u_4 &= 0,436\boxed{5}02359\dots \end{aligned}$$

Pour chaque nombre u_n, on ne considère que sa $n^{\text{ième}}$ décimale :

- si elle vaut 1, on la remplace par 2 ;
- si elle ne vaut pas 1, on la remplace par 1.

On construit ainsi un nombre x :

$$x = 0,2111\cdots$$

Par construction, $x \neq u_n$ pour tous les n : absurde. □

Ce procédé dû à Cantor, repris depuis dans d'autres contextes, porte le nom de procédé diagonal.

$]0,1[$ n'est pas dénombrable : preuve par l'absurde

Supposons qu'on puisse compter les nombres de $]0,1[$: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$
Écrivons le développement décimal de chacun de ces nombres :

$$u_1 = 0,\boxed{1}236544\ldots$$
$$u_2 = 0,5\boxed{6}76568\ldots$$
$$u_3 = 0,22\boxed{0}564574\ldots$$
$$u_4 = 0,436\boxed{5}02359\ldots$$

Pour chaque nombre u_n, on ne considère que sa $n^{\text{ième}}$ décimale :

- si elle vaut 1, on la remplace par 2 ;
- si elle ne vaut pas 1, on la remplace par 1.

On construit ainsi un nombre x :

$$x = 0,2111\cdots$$

Par construction, $x \neq u_n$ pour tous les n : absurde. $\square$

Ce procédé dû à Cantor, repris depuis dans d'autres contextes, porte le nom de procédé diagonal.

$]0,1[$ n'est pas dénombrable : preuve par l'absurde

Supposons qu'on puisse compter les nombres de $]0,1[$: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
Écrivons le développement décimal de chacun de ces nombres :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,\boxed{1}236544\dots \\ u_2 &= 0,5\boxed{6}76568\dots \\ u_3 &= 0,22\boxed{0}564574\dots \\ u_4 &= 0,436\boxed{5}02359\dots \end{aligned}$$

Pour chaque nombre u_n, on ne considère que sa $n^{\text{ième}}$ décimale :

- si elle vaut 1, on la remplace par 2 ;
- si elle ne vaut pas 1, on la remplace par 1.

On construit ainsi un nombre x :

$$x = 0,2111\cdots$$

Par construction, $x \neq u_n$ pour tous les n : absurde. $\square$

Ce procédé dû à Cantor, repris depuis dans d'autres contextes, porte le nom de procédé diagonal.

Une infinité d'infinis

On considère $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : croissance exponentielle.

Théorème (Cantor, 1881)

Si $E \neq \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus gros que E.

Conséquence : prenons $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\mathbb{N})\right)$,...

Une infinité d'infinis

On considère $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : croissance exponentielle.

Théorème (Cantor, 1881)

Si $E \neq \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus gros que E.

Conséquence : prenons $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\mathbb{N})\right)$,. . .

Une infinité d'infinis

On considère $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : croissance exponentielle.

Théorème (Cantor, 1881)

Si $E \neq \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus gros que E.

Conséquence : prenons $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$,...

Une infinité d'infinis

On considère $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1,2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Exemple

Si $E = \{1,2,3\}$, alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : croissance exponentielle.

Théorème (Cantor, 1881)

Si $E \neq \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus gros que E.

Conséquence : prenons $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\mathbb{N})\right)$, ...

Une infinité d'infinis

On considère $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1,2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Exemple

Si $E = \{1,2,3\}$, alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : croissance exponentielle.

Théorème (Cantor, 1881)

Si $E \neq \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus gros que E.

Conséquence : prenons $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ...

Une infinité d'infinis

On considère $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : croissance exponentielle.

Théorème (Cantor, 1881)

Si $E \neq \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus gros que E.

Conséquence : prenons $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ...

Une infinité d'infinis

On considère $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple

Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : croissance exponentielle.

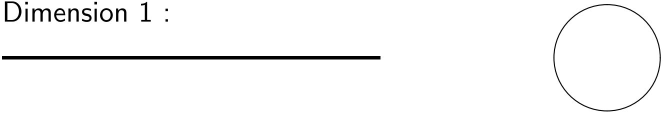
Théorème (Cantor, 1881)

Si $E \neq \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus gros que E.

Conséquence : prenons $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\mathbb{N})\right)$,...

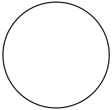
Infini géométrique : notion de dimension

Dimension 1 :



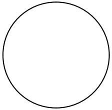
Infini géométrique : notion de dimension

Dimension 1 :

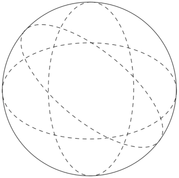


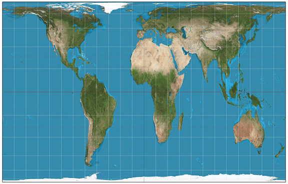
Infini géométrique : notion de dimension

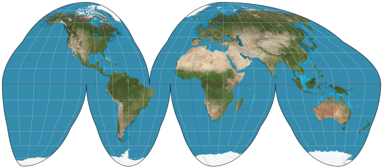
Dimension 1 :



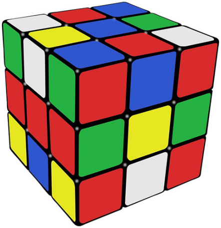
Dimension 2 :

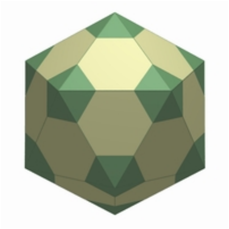




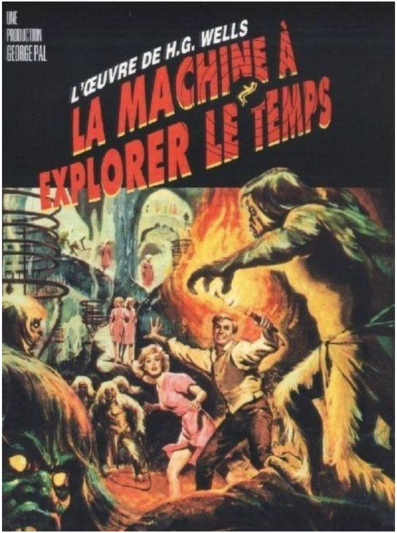


Dimension 3





Et au-delà ?


UNE PRODUCTION GEORGE PAL
L'ŒUVRE DE H.G. WELLS
LA MACHINE À EXPLORER LE TEMPS

Et au-delà ?

Dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, il faut considérer l'univers comme un espace à quatre dimensions : temps et espace sont intimement liés.

Et au-delà ?

There is a fifth dimension, beyond that which is known to man.

Et au-delà ?

There is a fifth dimension, beyond that which is known to man.

En mathématiques, on travaille dans des espaces de dimension quelconque, arbitrairement grande, de façon abstraite, ou en lien avec des applications :

- mécanique statistique : dans un gaz, on décrit la position et la vitesse de chacune des N molécules ;
- traitement d'image (position du pixel, couleur, évolution, . . .).

Des dimensions bizarres

Benoît Mandelbrot
(1924-2010)

Mesurer la longueur de la côte britannique ?

Des dimensions bizarres

Des dimensions bizarres

Première approximation (grossière) :

Deuxième approximation :

Des dimensions bizarres

Troisième approximation (de plus en plus fine) :

Des dimensions bizarres

À chaque étape, la longueur mesurée augmente

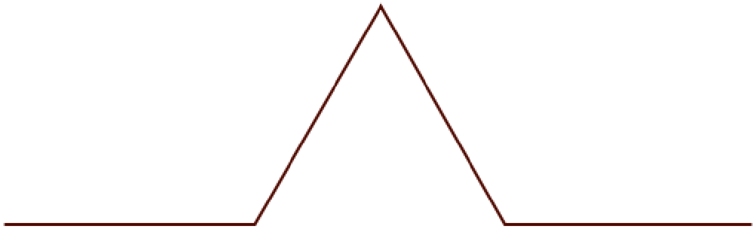
Des dimensions bizarres

À chaque étape, la longueur mesurée augmente . . .jusqu'à l'infini ?

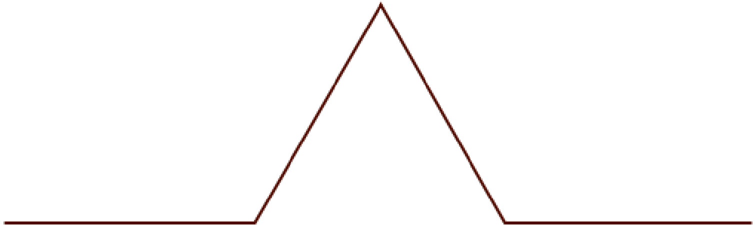
Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

On coupe le segment en trois, et on remplace le segment du milieu par un triangle équilatéral.

Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

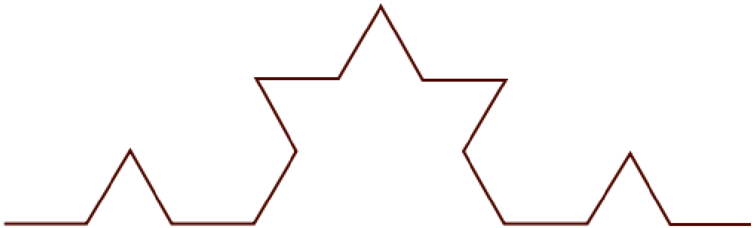


Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

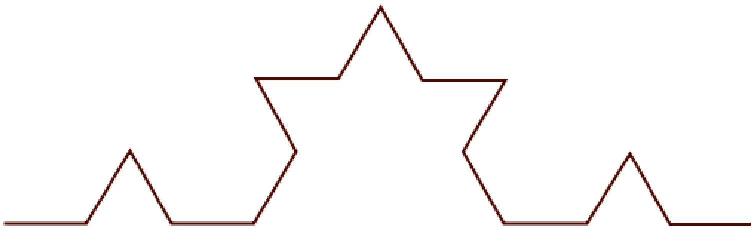


On recommence avec chacun des quatre segments.

Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

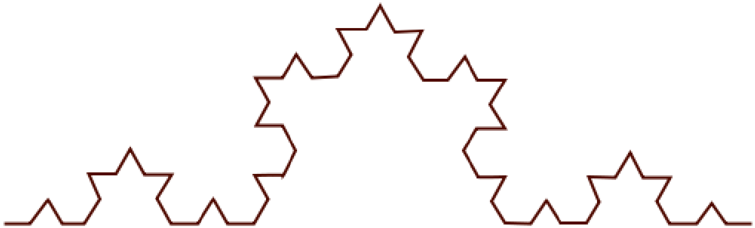


Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

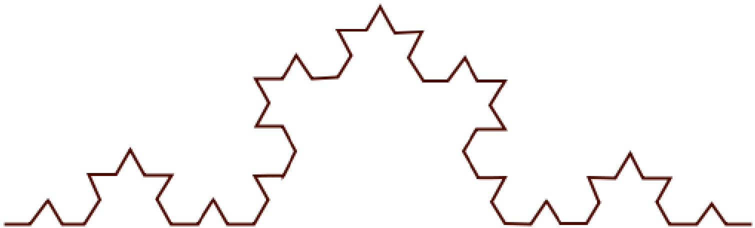


Et encore. . .

Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

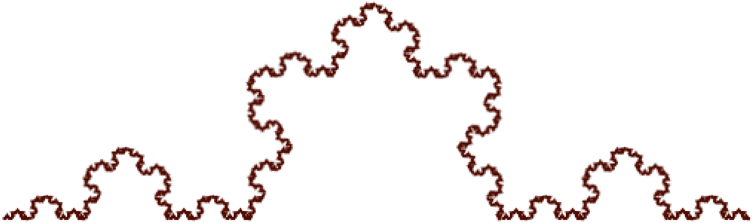


Un exemple de fractale : le flocon de von Koch



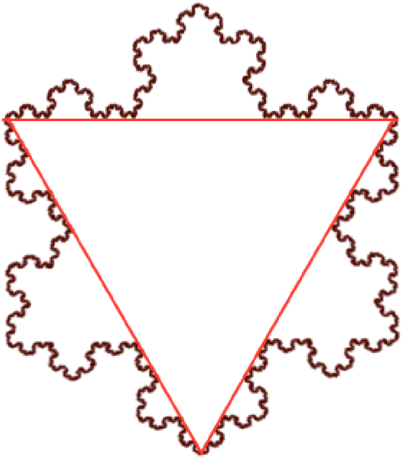
Jusqu'à l'infini. . .

Un exemple de fractale : le flocon de von Koch



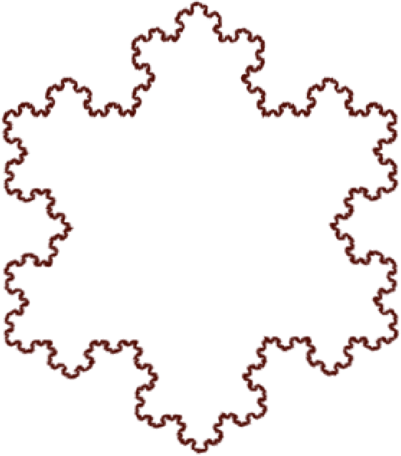
Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

En collant trois copies de la figure précédente :



Un exemple de fractale : le flocon de von Koch

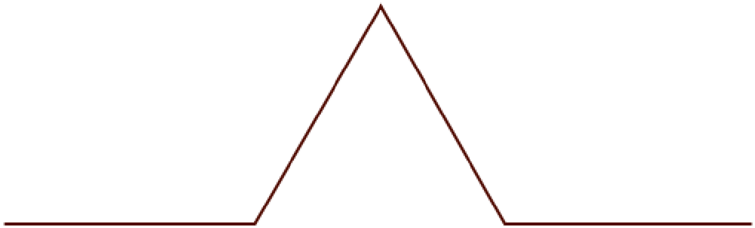
En collant trois copies de la figure précédente :



Quelle est la longueur du flocon de von Koch ?

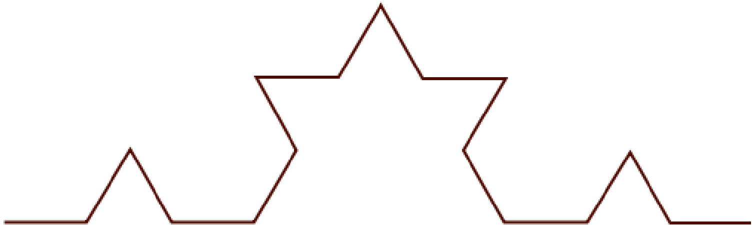
$L_1 = 1$ (convention).

Quelle est la longueur du flocon de von Koch ?



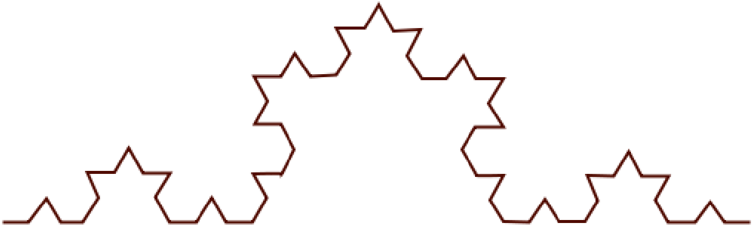
$$L_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Quelle est la longueur du flocon de von Koch ?



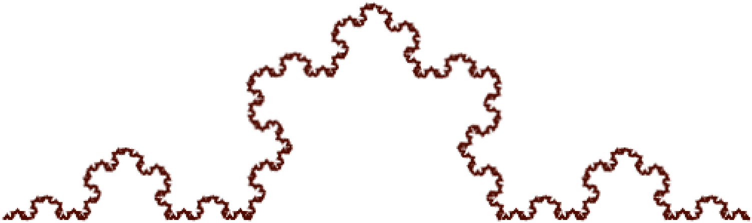
$$L_3 = \frac{4}{3} - 4 * \frac{1}{9} + 8 * \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Quelle est la longueur du flocon de von Koch ?



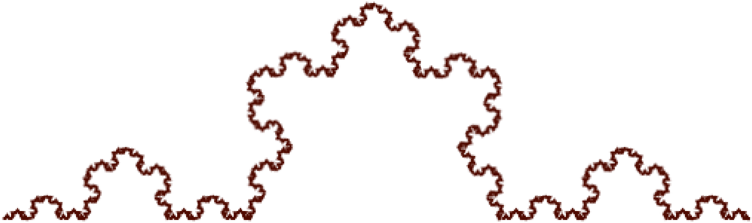
$$L_4 = \frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Quelle est la longueur du flocon de von Koch ?



$$L_\infty = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \infty!$$

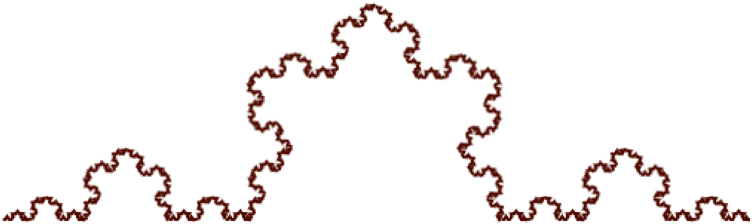
Quelle est la longueur du flocon de von Koch ?



$$L_\infty = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \infty !$$

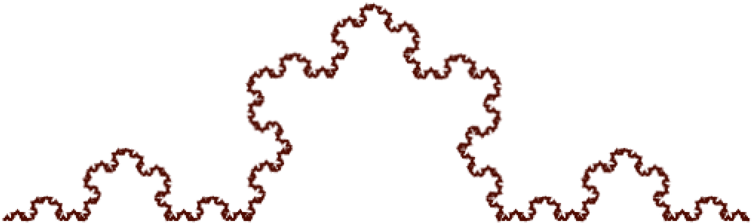
C'est une courbe de longueur infinie.

Quelle est la dimension du flocon de von Koch ?



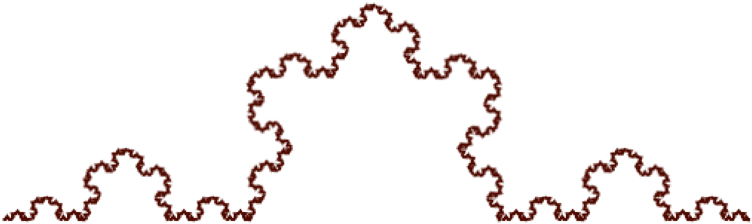
C'est une courbe de longueur infinie : sa dimension est plus grande que 1.
Pourtant, elle est « beaucoup plus petite » que l'intérieur d'un rectangle : sa dimension est plus petite que 2.
Il faut donc considérer une dimension non entière.

Quelle est la dimension du flocon de von Koch ?



C'est une courbe de longueur infinie : sa dimension est plus grande que 1.
Pourtant, elle est « beaucoup plus petite » que l'intérieur d'un rectangle : sa dimension est plus petite que 2.
Il faut donc considérer une dimension non entière.

Quelle est la dimension du flocon de von Koch ?



C'est une courbe de longueur infinie : sa dimension est plus grande que 1.
Pourtant, elle est ≪ beaucoup plus petite ≫ que l'intérieur d'un rectangle : sa dimension est plus petite que 2.
Il faut donc considérer une dimension non entière.

Rapide retour dans le monde réel

- Si on multiplie la longueur d'un segment par 2, on multiplie sa longueur par 2 (!).
- Si on double le rayon d'un cercle, on multiplie sa longueur par 2.
- Si on multiplie le côté d'un carré par 2, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on double le rayon d'un disque, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on multiplie le côté d'un cube par 2, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.
- Si on double le rayon d'une sphère, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.

Généralisations :

Rapide retour dans le monde réel

- Si on multiplie la longueur d'un segment par 2, on multiplie sa longueur par 2 (!).
- Si on double le rayon d'un cercle, on multiplie sa longueur par 2.
- Si on multiplie le côté d'un carré par 2, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on double le rayon d'un disque, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on multiplie le côté d'un cube par 2, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.
- Si on double le rayon d'une sphère, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.

Généralisations :

Rapide retour dans le monde réel

- Si on multiplie la longueur d'un segment par 2, on multiplie sa longueur par 2 (!).
- Si on double le rayon d'un cercle, on multiplie sa longueur par 2.
- Si on multiplie le côté d'un carré par 2, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on double le rayon d'un disque, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on multiplie le côté d'un cube par 2, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.
- Si on double le rayon d'une sphère, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.

Généralisations :

Rapide retour dans le monde réel

- Si on multiplie la longueur d'un segment par 2, on multiplie sa longueur par 2 (!).
- Si on double le rayon d'un cercle, on multiplie sa longueur par 2.
- Si on multiplie le côté d'un carré par 2, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on double le rayon d'un disque, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on multiplie le côté d'un cube par 2, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.
- Si on double le rayon d'une sphère, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.

Généralisations :

Rapide retour dans le monde réel

- Si on multiplie la longueur d'un segment par 2, on multiplie sa longueur par 2 (!).
- Si on double le rayon d'un cercle, on multiplie sa longueur par 2.
- Si on multiplie le côté d'un carré par 2, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on double le rayon d'un disque, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on multiplie le côté d'un cube par 2, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.
- Si on double le rayon d'une sphère, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.

Généralisations :

Rapide retour dans le monde réel

- Si on multiplie la longueur d'un segment par 2, on multiplie sa longueur par 2 (!).
- Si on double le rayon d'un cercle, on multiplie sa longueur par 2.
- Si on multiplie le côté d'un carré par 2, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on double le rayon d'un disque, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on multiplie le côté d'un cube par 2, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.
- Si on double le rayon d'une sphère, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.

Généralisations : si on double les dimensions d'une figure de dimension d, on multiplie sa mesure par 2^d.

Rapide retour dans le monde réel

- Si on multiplie la longueur d'un segment par 2, on multiplie sa longueur par 2 (!).
- Si on double le rayon d'un cercle, on multiplie sa longueur par 2.
- Si on multiplie le côté d'un carré par 2, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on double le rayon d'un disque, on multiplie sa surface par $4 = 2^2$.
- Si on multiplie le côté d'un cube par 2, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.
- Si on double le rayon d'une sphère, on multiplie son volume par $8 = 2^3$.

Généralisations : si on multiplie par k les dimensions d'une figure de dimension d, on multiplie sa mesure par k^d.

Application : dimension du flocon de von Koch

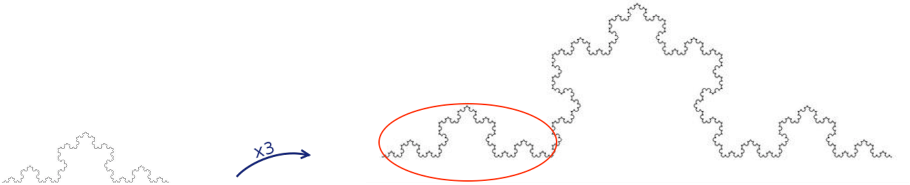
Si on multiplie par 3 *les dimensions d'une figure de dimension* d, *on multiplie sa mesure par* 3^d.

Application : dimension du flocon de von Koch

Si on multiplie par 3 les dimensions d'une figure de dimension d, on multiplie sa mesure par 3^d.

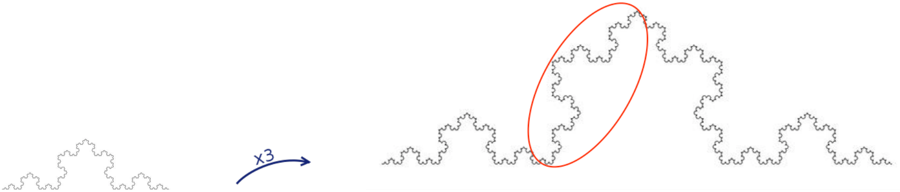
Application : dimension du flocon de von Koch

Si on multiplie par 3 *les dimensions d'une figure de dimension* d, *on multiplie sa mesure par* 3^d.



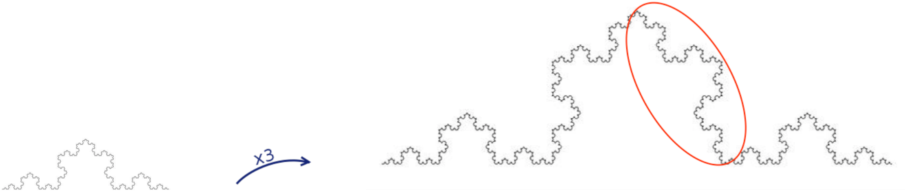
Application : dimension du flocon de von Koch

Si on multiplie par 3 les dimensions d'une figure de dimension d, on multiplie sa mesure par 3^d.



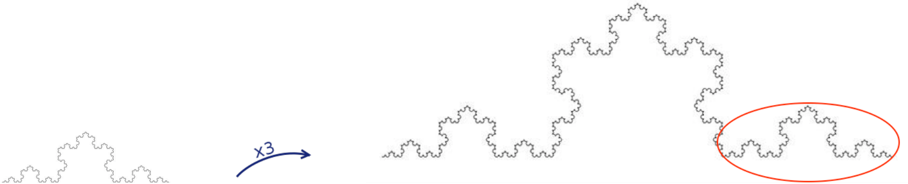
Application : dimension du flocon de von Koch

Si on multiplie par 3 *les dimensions d'une figure de dimension* d,
on multiplie sa mesure par 3^d.



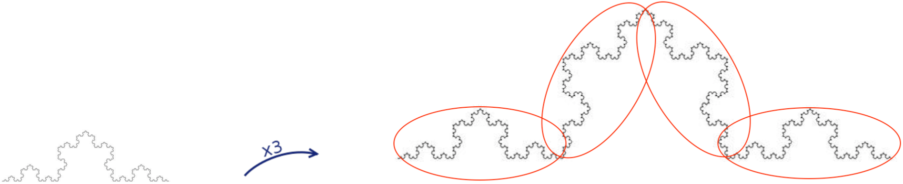
Application : dimension du flocon de von Koch

Si on multiplie par 3 les dimensions d'une figure de dimension d, on multiplie sa mesure par 3^d.



Application : dimension du flocon de von Koch

Si on multiplie par 3 les dimensions d'une figure de dimension d, on multiplie sa mesure par 3^d.

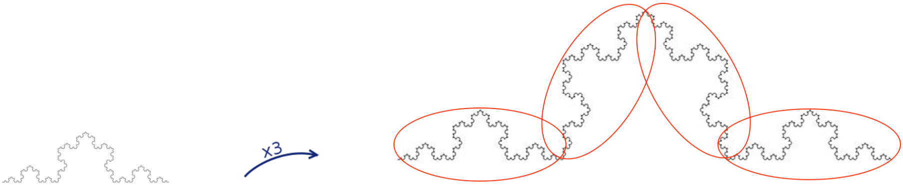


On a en fait 4 copies du flocon :

$$3^d = 4,$$

Application : dimension du flocon de von Koch

Si on multiplie par 3 les dimensions d'une figure de dimension d, on multiplie sa mesure par 3^d.

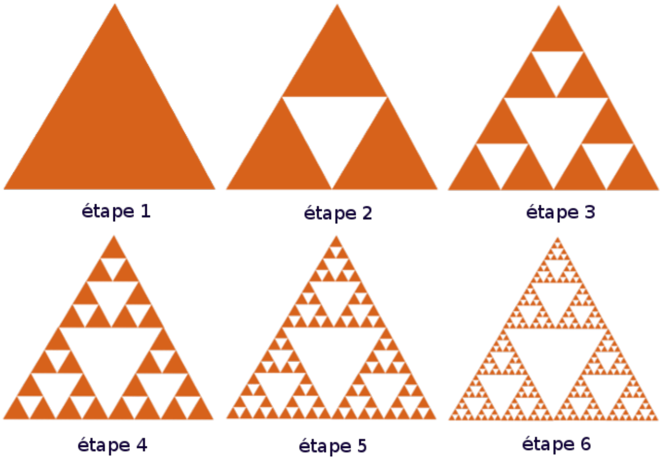


On a en fait 4 copies du flocon :

$$3^d = 4,$$

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2618595$$

Un autre exemple : le triangle de Sierpiński



L'objet limite a pour dimension $d = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58496.$

Conclusion

Les fractales sont un jeu mathématique. . .mais pas seulement. La notion de dimension fractale (ou dimension de Hausdorff) est cruciale dans plusieurs applications :

- traitement d'image : détection de contour ;
- modélisation des plantes (arbres, fougères) ;
- modélisation des bronches, des vaisseaux sanguins ;
- mouvements très rapides (très ≪ bruités ≫) : cours boursiers, autres phénomènes aléatoires (mouvement brownien).

Conclusion

Les fractales sont un jeu mathématique. . .mais pas seulement. La notion de dimension fractale (ou dimension de Hausdorff) est cruciale dans plusieurs applications :

- traitement d'image : détection de contour ;
- modélisation des plantes (arbres, fougères) ;
- modélisation des bronches, des vaisseaux sanguins ;
- mouvements très rapides (très « bruités ») : cours boursiers, autres phénomènes aléatoires (mouvement brownien).

Conclusion

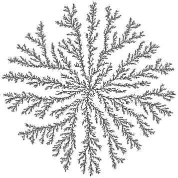
Les fractales sont un jeu mathématique. . .mais pas seulement. La notion de dimension fractale (ou dimension de Hausdorff) est cruciale dans plusieurs applications :

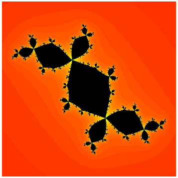
- traitement d'image : détection de contour ;
- modélisation des plantes (arbres, fougères) ;
- modélisation des bronches, des vaisseaux sanguins ;
- mouvements très rapides (très « bruités ») : cours boursiers, autres phénomènes aléatoires (mouvement brownien).

Conclusion

Les fractales sont un jeu mathématique. . .mais pas seulement. La notion de dimension fractale (ou dimension de Hausdorff) est cruciale dans plusieurs applications :

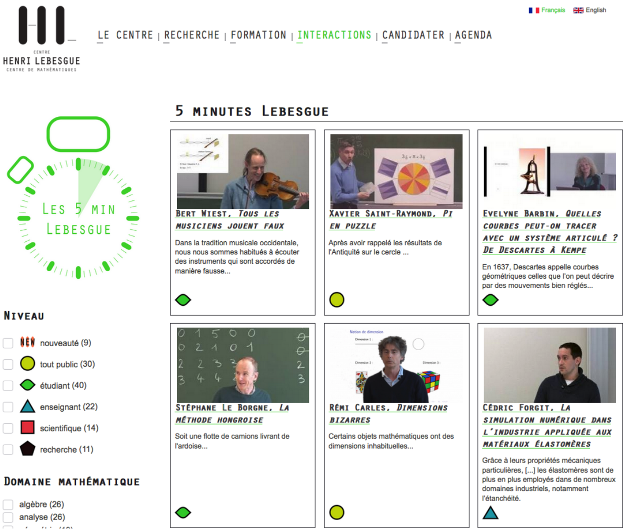
- traitement d'image : détection de contour ;
- modélisation des plantes (arbres, fougères) ;
- modélisation des bronches, des vaisseaux sanguins ;
- mouvements très rapides (très « bruités ») : cours boursiers, autres phénomènes aléatoires (mouvement brownien).



5 minutes Lebesgue

https://www.lebesgue.fr/fr/5min



Henri Poincaré (1854-1912).

Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi : je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici, je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver.