Transformée de Fourier et théorème de Stone-Weierstrass

`http://www.maths.univ-rennes1.fr/~carles/ENS/`

Énoncé

Pour a, $x \in \mathbb{R}$, on pose $e_a(x) = e^{iax}$. Pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x)dx.$$

1.a. Pour $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de

$$\frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]},$$

puis celle de

$$\frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]} * \frac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]},$$

où le produit de convolution est défini par

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)dy.$$

1.b. Soit h_0 la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h_0(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sin(x\sqrt{2})}{x\sqrt{2}}\right)^2.$$

Vérifier que h_0 est strictement positive et que $\hat{h}_0$ est à support compact.

2. Soit H l'espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, á valeurs complexes, dont la transformée de Fourier est à support compact.
a. Vérifier que pour tout réel a, $h_0 e_a \in H$ et que, si h_1, $h_2 \in H$, alors $h_1 h_2 \in H$.
b. Soit $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$, et $C(\hat{\mathbb{R}})$ l'algèbre des fonctions numériques continues sur $\hat{\mathbb{R}}$, munie de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la sous-algèbre A de $C(\hat{\mathbb{R}})$ engendrée par les fonctions de H et par la fonction $\mathbf{1}$ est dense dans $C(\hat{\mathbb{R}})$.
c. Conclure que H est dense dans l'espace C_0 des fonctions numériques, continues sur $\mathbb{R}$, tendant vers 0 en $\pm\infty$, muni de la norme de la convergence uniforme.

Solution
1.a. Si $f_a = \dfrac{1}{2a}\mathbf{1}_{[-a,a]}$, alors

$$\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}dx = \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_a * f_a)(\xi) &= \frac{1}{4a^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\Big(\int_{-a}^{a}\mathbf{1}_{[-a,a]}(x-y)dy\Big)dx \\ &= \frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a} e^{-iy\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)\xi}\mathbf{1}_{[-a,a]}(x-y)dx\Big)dy,\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini, et en posant $x' = x - y$ dans l'intégrale en x, on trouve

$$\mathcal{F}(f_a * f_a)(\xi) = \left(\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}\right)^2.$$

Remarque : on n'avait pas vraiment besoin de faire ce calcul, en connaissant la formule,

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}(f * g) = \hat{f}.\hat{g}.$$

Le calcul ci-dessus permet de vérifier cette formule dans le cas particulier où $f = g = f_a$.

1.b. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et tend vers 1 en zéro. Son prolongement par continuité est même C^∞, car la fonction sinus est développable en série entière autour de l'origine, de rayon infini, et se factorise par x. Ainsi, $h_0(0) = 2$.
La fonction h_0 étant somme de deux carrés, elle ne peut s'annuler que si les deux carrés sont nuls, c'est-à-dire si

$$\sin x = \sin(x\sqrt{2}) = 0,$$

ce qui équivaut à $x = k\pi$ et $x\sqrt{2} = k'\pi$, pour des entiers relatifs k et k'. Comme $h_0(0) > 0$, le cas $kk' = 0$ est exclu, donc on peut simplifier par x pour trouver $\sqrt{2} = k'/k \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc h_0 ne s'annule pas.
Pour trouver la transformée de Fourier de h_0, on utilise la formule d'inversion de Fourier.

Proposition 1 *Soit u une fonction dans $L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ telle que sa transformée de Fourier $\hat{u}$ soit dans $L^!(\mathbb{R})$. On a alors la relation, pour tout réel x,*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)d\xi.$$

Remarques :

- Comme $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, l'intégrale du membre de droite définit une fonction continue en x, donc la proposition dit que deux fonctions continues coïncident partout.
- La démonstration est la même que pour le cas des fonctions dans la classe de Schwartz (c'est-à-dire celle donnée dans le livre de Zuily et Queffélec). Du coup, on peut énoncer le résultat directement sous cette forme dans un plan, et signaler qu'en particulier, il est vrai si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Démonstration : puisque $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}\hat{u}(\xi)d\xi.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction $(y,\xi) \mapsto e^{-\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}u(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}\hat{u}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi}u(y)dy\Big)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(y)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi}e^{-\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}d\xi\Big)dy.\end{aligned}$$

L'intégrale en ξ est la transformée de Fourier d'une gaussienne, et vaut

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi}e^{-\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}}.$$

On a donc, avec le changement de variable $t = \frac{x-y}{\sqrt{\varepsilon}}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}\hat{u}(\xi)d\xi &= \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}}u(y)dy \\ &= \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}u(x+t\sqrt{\varepsilon})dt.\end{aligned}$$

Puisque u est continue, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(x+t\sqrt{\varepsilon}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u(x)$, donc par le théorème de convergence dominée (u est bornée),

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}u(x+t\sqrt{\varepsilon})dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u(x)\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}u(x),$$

ce qui achève la preuve. □

On déduit de la proposition que si $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ et $\hat{u} \in L^!(\mathbb{R})$, alors

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\circ\mathcal{F}u(-x).$$

Corollaire 1 *Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors pour presque tout réel x,*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F} \circ \mathcal{F}u(-x).$$

Si u est continue, alors l'égalité est vraie pour tout réel x.

Démonstration : notons $v(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F} \circ \mathcal{F}u(-x)$, et ϕ l'application $u \mapsto v$. Notons $E = \{u \in L^1,\ \hat{u} \in L^1\}$ et $F = \{u \in L^1 \cap C_0,\ \hat{u} \in L^1\}$. On munit E de la norme

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^1} + \|\hat{u}\|_{L^1}.$$

Alors ϕ est continue de F dans $C_0(\mathbb{R})$, et vaut l'identité sur F, qui est dense dans E (par exemple, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset F$), et

$$\|\phi(u)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2\pi}\|\hat{u}\|_{L^1} \leq \frac{1}{2\pi}\|u\|_E.$$

Comme $C_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach, l'application ϕ se prolonge à E de manière unique, donc vaut l'identité sur E.
Si $\hat{u} \in L^1$, on a toujours $\phi(u) \in C_0(\mathbb{R})$. Donc si u est continue, on sait que deux fonctions continues coïncident presque partout, donc elles sont partout égales. $\square$

En particulier, d'après le calcul de $\mathcal{F}(f_a * f_a)$, on a

$$h_0 = \mathcal{F}(f_1 * f_1 + f_{\sqrt{2}} * f_{\sqrt{2}}).$$

Si f_1 n'est pas continue, $f_1 * f_1$ par contre l'est. Ainsi,

$$\hat{h}_0(\xi) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f_1 * f_1 + f_{\sqrt{2}} * f_{\sqrt{2}})(\xi) = 2\pi(f_1 * f_1 + f_{\sqrt{2}} * f_{\sqrt{2}})(-\xi),$$

qui est bien une fonction à support compact ($\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$).

2.a. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}(h_0 e_a)(\xi) = \int e^{-ix\xi} e^{iax} h_0(x)dx = \mathcal{F}h_0(\xi - a),$$

donc $\mathcal{F}(h_0 e_a)$ est à support compact d'après la question précédente. Par ailleurs, $h_0 e_a$ est évidemment continue et intégrable.
Si h_1, $h_2 \in H$, alors d'après le corollaire, elles sont bornées, et leur produit est bien continu et intégrable. D'après la relation

$$\mathcal{F}(h_1 h_2) = \frac{1}{2\pi}\hat{h}_1 * \hat{h}_2,$$

et puisque le produit de convolution de deux fonctions à support compact est à support compact, on en déduit que $h_1 h_2 \in H$.

2.b. On applique le théorème de Stone-Weierstraß. L'ensemble $\hat{\mathbb{R}}$ est compact, donc il s'agit de montrer que A est une sous-algèbre de $C(\hat{\mathbb{R}})$,

1. contenant la fonction constante égale à 1,
2. stable par conjugaison,
3. séparant les points.

Tout d'abord, on a bien $A \subset C(\hat{\mathbb{R}})$, car toute fonction de A s'écrit comme somme d'une constante et d'une fonction de H, cette dernière étant dans $C_0(\mathbb{R}) \subset C(\hat{\mathbb{R}})$.

Le premier point est vérifié par construction de A. Le second est évident. Soit maintenant deux points distincts x et y. Si $h_0(x) \neq h_0(y)$, alors comme $h_0 \in H \subset A$, c'est terminé. Sinon, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $e_a(x) \neq e_a(y)$ (par l'absurde). Comme h_0 ne s'annule pas, on en déduit $h_0(x)e_a(x) \neq h_0(y)e_a(y)$. Et d'après 2.a., $h_0 e_a \in H$, donc on peut appliquer le théorème de Stone-Weierstraß.

2.c. Soient $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Comme $C_0(\mathbb{R}) \subset C(\hat{\mathbb{R}})$, il existe $g \in A$ telle que

$$\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

On n'a pas tout à fait $g \in H$, car g est une somme d'une constante et d'une fonction de H. Montrons que cette constante est petite. On a $g(x) = C + g_1(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$ et $g_1 \in H$, donc $C = \lim_{|x| \to \infty} g(x)$ (même limite en $+\infty$ et en $-\infty$). Or (1) s'écrit aussi,

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ |f - g|(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc en faisant tendre x vers l'infini, il vient $C \leq \varepsilon/2$, donc

$$\|f - g_1\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + C < \varepsilon,$$

et $g_1 \in H$, ce qui répond à la question.