Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et applications

R. Carles

Soit (Ω, μ) un espace mesuré, μ étant une mesure positive. On note $L^p(\Omega)$ l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions f μ-mesurables de Ω dans $\mathbb{C}$ telles que, si $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty,$$

et si $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Soit T une application linéaire de $L^p(\Omega, d\mu)$ dans $L^q(U, d\nu)$, c'est-à-dire $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$. On note

$$T : L^p \to L^q.$$

On suppose en outre que T est bornée,

$$M = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} < \infty.$$

Si T est bornée $L^{p_1} \to L^{q_1}$ et $L^{p_2} \to L^{q_2}$, on peut se demander si T est également bornée sur un espace intermédiaire, c'est-à-dire si T est bornée $L^p \to L^q$, pour $p_1 \leq p \leq p_2$. Si oui, comment trouve-t-on la valeur correspondante pour q ? Le théorème de Riesz-Thorin apporte des réponses à ces questions.

1 Le lemme des trois droites d'Hadamard

Ce résultat d'analyse complexe est à la base de la preuve donnée par Thorin du résultat du paragraphe 2.

Lemme 1 *Soit F analytique dans la bande ouverte $0 < \operatorname{Re} z < 1$, continue et bornée dans la bande fermée $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Si*

$$|F(it)| \leq M_0, \qquad |F(1+it)| \leq M_1, \qquad -\infty < t < \infty,$$

alors pour tout $0 \leq \theta \leq 1$,

$$|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Démonstration : soient $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons

$$F_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2 + \lambda z} F(z).$$

On a alors

$$|F_\varepsilon(z)| = e^{\varepsilon \operatorname{Re} z^2 + \lambda \operatorname{Re} z} |F(z)| \leq e^{\varepsilon - \varepsilon (\operatorname{Im} z)^2 + \lambda \operatorname{Re} z} |F(z)| \underset{\operatorname{Im} z \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus,

$$|F_\varepsilon(it)| \leq M_0, \qquad |F_\varepsilon(1+it)| \leq M_1 e^{\varepsilon + \lambda}.$$

D'après le principe du maximum, on a dans la bande $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$,

$$|F_\varepsilon(z)| \leq \max(M_0, M_1 e^{\varepsilon + \lambda}),$$

soit encore,

$$|F(\theta + it)| \leq e^{-\varepsilon(\theta^2 - t^2)} \max(M_0 e^{-\theta\lambda}, M_1 e^{(1-\theta)\lambda + \varepsilon}).$$

Fixons $\theta \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}$. On peut passer à la limite $\varepsilon \to 0$, ce qui donne

$$|F(\theta + it)| \leq \max(M_0 \rho^{-\theta}, M_1 \rho^{1-\theta}),$$

où $\rho = e^\lambda$. Optimisons en ρ : le second membre est minimum lorsque $M_0 \rho^{-\theta} = M_1 \rho^{1-\theta}$, c'est-à-dire $\rho = M_0/M_1$. Avec ce choix, on a

$$|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

2 Le théorème de Riesz-Thorin

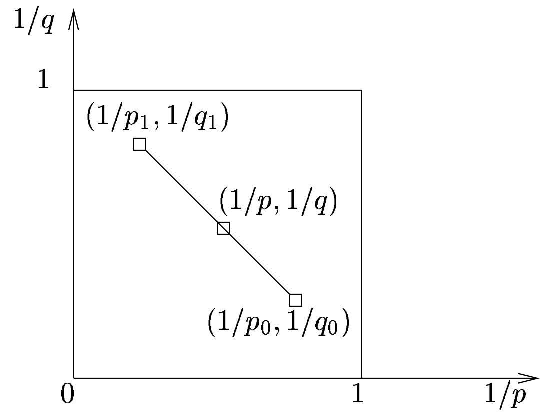
Théorème 1 *Supposons $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. On suppose de plus que pour $i = 0, 1$, l'opérateur T est continu $L^{p_i}(\Omega, \mu) \to L^{q_i}(U, \nu)$, de norme M_i. Alors T est continu $L^p(\Omega, \mu) \to L^q(U, \nu)$, de norme*

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \tag{1}$$

pour $0 < \theta < 1$ et

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{2}$$

Remarques :
- L'inégalité (1) signifie que M est logarithmiquement convexe, c'est-à-dire que $\log M$ est convexe.
- Donnons une interprétation géométrique de (2).
  Les points $(1/p, 1/q)$ décrits par (2) sont les points du segment joignant $(1/p_0, 1/q_0)$ et $(1/p_1, 1/q_1)$. Il faudrait considérer L^p comme une «fonction» de $1/p$ plutôt que de p.



Démonstration : écrivons

$$\langle h, g\rangle = \int_U h(y)g(y)d\nu,$$

et $1/q' = 1 - 1/q$. Alors d'après l'inégalité de Hölder,

$$\|h\|_{L^q} = \sup\{|\langle h, g\rangle|,\ \|g\|_{L^{q'}} = 1\},$$

et

$$M = \sup\{|\langle Tf, g\rangle|,\ \|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{q'}} = 1\}.$$

Par hypothèse, $p < \infty$ et $q' < \infty$, donc on peut supposer que f et g sont continues à support compact.

Pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, notons

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$

et

$$\varphi(z) = \varphi(x, z) = |f(x)|^{p/p(z)} f(x)/|f(x)|,\ x \in \Omega,$$

$$\psi(z) = \psi(y, z) = |g(y)|^{q'/q'(z)} g(y)/|g(y)|,\ y \in U.$$

Alors $\varphi(z) \in L^{p_i}$, $\psi(z) \in L^{q_i'}$, donc $T\varphi(z) \in L^{q_i}$, $i = 0, 1$. On vérifie aussi que $\varphi'(z) \in L^{p_i}$, $\psi'(z) \in L^{q_i'}$, donc $(T\varphi)'(z) \in L^{q_i}$ $(0 < \operatorname{Re} z < 1)$. On peut donc définir

$$F(z) = \langle T\varphi(z), \psi(z)\rangle, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1.$$

La fonction F est analytique dans la bande ouverte $0 < \operatorname{Re} z < 1$, bornée et continue dans la bande fermée $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Remarquons ensuite que

$$\|\varphi(it)\|_{L^{p_0}} = \||f|^{p/p_0}\|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{p/p_0} = 1,$$

$$\|\varphi(1+it)\|_{L^{p_1}} = \||f|^{p/p_1}\|_{L^{p_1}} = \|f\|_{L^p}^{p/p_1} = 1,$$

et de même

$$\|\psi(it)\|_{L^{q_0'}} = \|\psi(1+it)\|_{L^{q_1'}} = 1.$$

D'après les hypothèses, on a par conséquent,

$$|F(it)| \leq \|T\varphi(it)\|_{L^{q_0}} \|\psi(it)\|_{L^{q_0'}} \leq M_0,$$

$$|F(1+it)| \leq \|T\varphi(1+it)\|_{L^{q_1}} \|\psi(1+it)\|_{L^{q_1'}} \leq M_1.$$

Remarquons également les identités

$$\varphi(\theta) = f, \quad \psi(\theta) = g,$$

ainsi

$$F(\theta) = \langle Tf, g \rangle.$$

D'après le lemme des trois droites, on a donc

$$|\langle Tf, g \rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

3 Applications

Dans ce paragraphe, on considère le cas où $\Omega = U = \mathbb{R}^n$, et $d\mu = d\nu = dx$ (mesure de Lebesgue).

3.1 Transformée de Fourier

Notons $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x) dx.$$

On a alors évidemment

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \int |f(x)| dx,$$

et si f est à valeurs réelles et positive,

$$\hat{f}(0) = \int |f(x)| dx,$$

donc

$$\mathcal{F} \; : \; L^1 \to L^\infty,$$

avec norme 1.

D'après la formule de Plancherel,

$$\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int |f(x)|^2 dx,$$

donc

$$\mathcal{F} \; : \; L^2 \to L^2,$$

avec norme $(2\pi)^{n/2}$.

D'après le théorème de Riesz-Thorin,

$$\mathcal{F} \; : \; L^p \to L^q,$$

avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

En éliminant θ, on constate que $1/p = 1 - 1/q$, c'est-à-dire $q = p'$, avec $1 < p < 2$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 2 *(Inégalité de Hausdorff-Young). Si $1 \leq p \leq 2$, alors*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^{p'}} \leq (2\pi)^{n/p'} \|f\|_{L^p}.$$

3.2 Inégalité de Young

Soit k une fonction dans L^q. Définissons l'opérateur de convolution

$$Tf(x) = \int k(x-y)f(y)dy.$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\|Tf\|_{L^\infty} \leq \|k\|_{L^q}\|f\|_{L^{q'}}.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|Tf\|_{L^q} \leq \|k\|_{L^q}\|f\|_{L^1}.$$

Ainsi,

$$T : L^{q'} \to L^\infty,$$
$$T : L^1 \to L^q,$$

et par conséquent

$$T : L^p \to L^r,$$

où

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q'} + \frac{\theta}{1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{q}.$$

En éliminant θ, il vient $1/r = 1/p - 1/q'$ et $1 \leq p \leq q'$.

Théorème 3 *(Inégalité de Young). Si $k \in L^q$ et $f \in L^p$, avec $1 < p < q'$, alors $k * f \in L^r$ pour $1 + 1/r = 1/p + 1/q$, et*

$$\|k * f\|_{L^r} \leq \|k\|_{L^q}\|f\|_{L^p}.$$

Références

[1] J. Bergh, J. Löfström : *Interpolation Spaces, An Introduction.* Springer-Verlag, 1976.