1. Transformée de Fourier des gaussiennes

Pour $a > 0$, et $\xi \in \mathbb{R}$, on définit

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-a\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue.

2. Montrer que f est dérivable et calculer f' en fonction de f.

3. En déduire $f(\xi)$ en fonction de $f(0)$.

4. Calculer $f(0)$ et conclure.
Indication : on pourra poser

$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

et calculer I^2 à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires.

2. Calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

2. Vérifier que pour $x > 0$,

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} dt.$$

3. Peut-on en déduire

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_{x=0}^\infty \int_{t=0}^\infty e^{-tx} \sin x \, dx \, dt\,?$$

4. Pour $A > 0$, calculer $\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ à l'aide du théorème de Fubini.

5. En déduire que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$