

Dimension de Hausdorff

R. Carles

1 Introduction

1.1 Exemples d'ensembles «pathologiques»

1.1.1 L'ensemble triadique de Cantor

On considère l'intervalle $E_0 = [0, 1]$ privé de son tiers médian $]1/3, 2/3[$. On obtient l'ensemble réunion disjointe de deux intervalles $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. On prive chacun de ces deux intervalles de son tiers médian, pour obtenir $E_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, réunion disjointe de quatre intervalles (figure 1). On suppose que E_n est réunion de 2^n intervalles disjoints. On construit E_{n+1} en privant chacun de ces intervalles de son tiers médian. On obtient donc une suite décroissante d'ensembles : l'ensemble triadique de Cantor est la limite de cette suite d'ensembles, $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.



FIG. 1 – Construction de l'ensemble triadique de Cantor.

Propriétés de F :

- F est compact, non vide.
- $F = \{x/x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} ; a_j = 0 \text{ ou } 2\}$. En effet, tout nombre de $[0, 1]$ peut se décomposer en base 3. Lorsqu'on passe de E_0 à E_1 , on impose $a_1 \neq 1$, quand on passe de E_1 à E_2 , on impose $a_2 \neq 1$, et ainsi de suite. En particulier, F est non dénombrable.
- F est totalement discontinu (ses composantes connexes sont réduites à un point).
- F est auto-semblable : $3(F \cap [0, 1/3]) = 3(F \cap [2/3, 1]) = F$.
- F est de mesure de Lebesgue nulle.

1.1.2 Flocon de von Koch

On construit un ensemble F par la procédure décrite par la figure 2, $F = \lim_{k \rightarrow \infty} E_k$. Chaque tiers médian est remplacé par les deux autres côtés du triangle équilatéral au-dessus de lui.

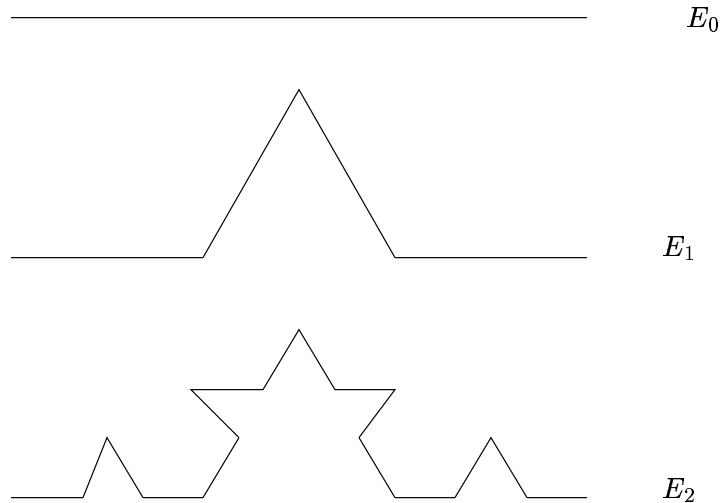


FIG. 2 – Construction du flocon de von Koch.

Propriétés de F :

- auto-semblable.
- longueur $|F| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} (4/3)^k = \infty$.
- aire $A(F) = 0$.

Longueur et aire ne sont donc pas des notions satisfaisantes pour mesurer F .

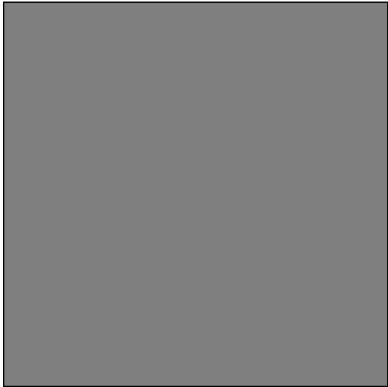
1.1.3 Poussière de Cantor

C'est l'analogie dans le plan de l'ensemble triadique de Cantor. À chaque étape, on divise un carré en seize parties, et on n'en garde que quatre.

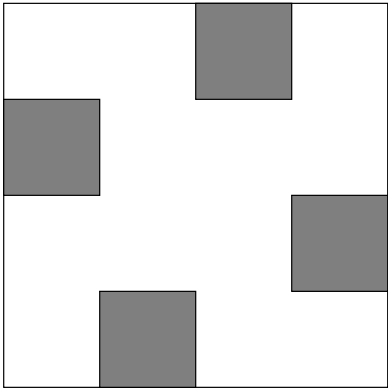
1.2 Début d'interprétation

Les trois ensembles décrits précédemment sont des exemples de fractals (du latin *fractus*, brisé). Pour les mesurer, il semble nécessaire d'introduire une autre notion de dimension (non entière).

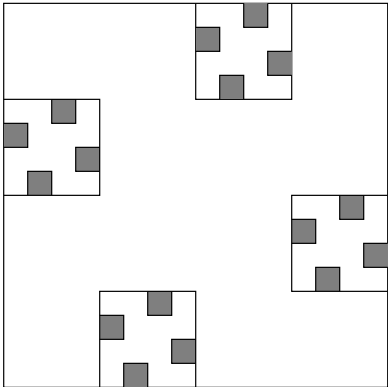
Donnons un calcul «intuitif» de la dimension de courbes obtenues par un procédé algorithmique bien défini.



E_0



E_1



E_2

FIG. 3 – Construction de la poussière de Cantor.

Un segment est obtenu par réunion de quatre copies réduites à l'échelle 1/4.

$$-\frac{\log 4}{\log(1/4)} = 1 \text{ est la dimension du segment.}$$

Un carré est obtenu par réunion de quatre copies réduites à l'échelle 1/2.

$$-\frac{\log 4}{\log(1/2)} = 2 \text{ est la dimension du carré.}$$

L'ensemble triadique de Cantor est obtenu par réunion de quatre copies réduites à l'échelle 1/9.

$$-\frac{\log 4}{\log(1/9)} = \frac{\log 2}{\log 3} \text{ est la dimension de cet ensemble.}$$

Le flocon de von Koch est obtenu par réunion de quatre copies réduites à l'échelle 1/3.

$$-\frac{\log 4}{\log(1/3)} = \frac{\log 4}{\log 3} \text{ est la dimension de cet ensemble.}$$

Remarque : il existe plusieurs notions/définitions de dimension fractale, d'où un risque de confusion. Pour Mandelbrot, est fractal un ensemble dont la dimension de Hausdorff est strictement supérieure à la dimension topologique. L'inconvénient d'une telle définition est qu'elle exclut certains ensembles que l'on «devine» fractals.

2 Mesure de Hausdorff

Si U est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n euclidien, on note

$$\text{diam } U = |U| = \sup\{\|x - y\| ; x, y \in U\}.$$

Définition 1 *Mesure de Hausdorff.*

- δ -recouvrement de F : $F \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, avec $|U_i| \leq \delta$.
- soient $s \geq 0$, $\delta > 0$:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^s ; (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \delta\text{-recouvrement de } F \right\} \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

- mesure s -dimensionnelle de Hausdorff de F :

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Propriétés :

- $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

- si $E \subset F$, alors $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.
- $\mathcal{H}^s(\cup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(F_i)$.
- \mathcal{H}^s est une mesure (pas immédiat à montrer).
- si $s = n$, \mathcal{H}^n est proportionnelle à la mesure de Lebesgue. Pour le voir, on peut utiliser la caractérisation suivante de la mesure de Lebesgue : elle est finie sur les compacts, invariante par translation et normalisée à 1 sur le pavé unité.
- homogénéité (de degré s) : pour $\lambda > 0$, $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$.

Démonstration : si $(U_i)_i$ est un δ -recouvrement de F , alors $(\lambda U_i)_i$ est un $\lambda\delta$ -recouvrement de λF . Ainsi,

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^s,$$

donc en prenant l'infimum, $\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Avec $\delta \rightarrow 0$, il vient

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

L'autre inégalité s'obtient en remplaçant λ par $1/\lambda$.

Proposition 1 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Soit $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ tels que pour tous $x, y \in F$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

On dit alors que f est α -höldérienne (lipschitzienne si $\alpha = 1$). Alors pour tout s ,

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

Démonstration : soit $(U_i)_i$ un δ -recouvrement de F . Alors

$$|f(F \cap U_i)| \leq C|U_i|^\alpha,$$

donc $(f(F \cap U_i))_i$ est un ε -recouvrement de $f(F)$, avec $\varepsilon = C\delta^\alpha$.

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq C^{s/\alpha} \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^s.$$

En prenant l'infimum sur les δ -recouvrements,

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

L'inégalité recherchée s'obtient alors en faisant tendre δ vers zéro. \square

Conséquence : si f est une isométrie ($|f(x) - f(y)| = |x - y|$), $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$. En particulier, ceci démontre que \mathcal{H}^s est invariante par translation.

3 Dimension de Hausdorff

Soient F et $\delta < 1$ fixés. L'application $s \mapsto \mathcal{H}_\delta^s(F)$ est décroissante, donc il en est de même pour $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$. Plus précisément, si $t > s$ et $(U_i)_i$ est un δ -recouvrement de F , alors

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^s,$$

et donc

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Maintenant faisons tendre δ vers 0. Si $\mathcal{H}^s(F)$ est finie, alors $\mathcal{H}^t(F) = 0$. Ainsi, le «graphe» de $\mathcal{H}^s(F)$ saute de la valeur $+\infty$ à la valeur 0. On définit alors la *dimension de Hausdorff* comme étant la valeur pour laquelle saute cette mesure,

$$\dim_H F = \inf\{s ; \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s ; \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Remarques :

- si $s = \dim_H F$, on ne sait pas en général plus que $\mathcal{H}^s(F) \in \overline{\mathbb{R}_+}$.
- par contre, si $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ (on dit alors que F est un s -ensemble), alors $\dim_H F = s$.

Exemple : considérons un disque de rayon 1, dans l'espace \mathbb{R}^3 . Alors

- $\mathcal{H}^1(F) = \infty$ (longueur infinie).
- $\mathcal{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} A(F) = 4$.
- $\mathcal{H}^3(F) = 0$ (volume nul).

On trouve bien $\dim_H F = 2$ (c'est heureux).

Propriétés :

- *ouverts* : si $F \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, alors $\dim_H F = n$.
- *ensembles réguliers* : F sous-variété C^1 de \mathbb{R}^n de dimension m . Alors $\dim_H F = m$.
- *monotonie* : si $E \subset F$, alors $\dim_H E \leq \dim_H F$.
- *stabilité dénombrable* : si $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles, alors

$$\dim_H \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_H F_i.$$

Démonstration : par monotonie, $\dim_H \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$ pour tout j . Pour l'autre inégalité, considérons $s > \dim_H F_j$ pour tout j . Alors $\mathcal{H}^s(F_j) = 0$ pour tout j , donc par sous-additivité dénombrable,

$$\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) = 0,$$

donc $s > \dim_H \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$. □

– ensembles dénombrables : si F est dénombrable, alors $\dim_H F = 0$.

Proposition 2 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ est α -höldérienne, alors

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F.$$

Démonstration : si $s > \dim_H F$, alors $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0$, donc pour tout $s > \dim_H F$, $\dim_H f(F) \leq s/\alpha$. \square

Corollaire 1 Soient $F \subset \mathbb{R}^n$ et $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si f est lipschitzienne, alors $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.
2. Si f est bi-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $C_1 \leq C_2$ telles que pour tous $x, y \in F$,

$$C_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_2|x - y|,$$

alors $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

Démonstration : pour le premier point, on prend $\alpha = 1$ dans la proposition précédente. Pour le second, $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ fournit l'autre inégalité. \square

Proposition 3 Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Si $\dim_H F < 1$, alors F est totalement discontinu.

Démonstration : soient $x, y \in F$, $x \neq y$. Considérons l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ z \mapsto |z - x|. \end{cases}$$

D'après l'inégalité triangulaire, f est lipschitzienne, donc $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. En particulier, $\mathcal{H}^1(f(F)) = 0$, donc $f(F)$ est de longueur nulle : $f(F)^c$ est dense dans \mathbb{R}_+ . Soit donc $r \in f(F)^c$, avec $0 < r < f(y)$. On a alors

$$F = \{z \in F ; |z - x| < r\} \cup \{z \in F ; |z - x| > r\},$$

union disjointe de deux ouverts, l'un contenant x , l'autre y . \square

4 Calcul de la dimension de Hausdorff sur des exemples simples

4.1 Poussière de Cantor

On montre que $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$, et on en déduit que $\dim_H F = 1$.

Démonstration : F est recouvert par 4^k carrés de côté 4^{-k} (diamètre $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$), c'est-à-dire E_k . Ainsi

$$\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq 4^k \cdot 4^{-k} \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient

$$\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}.$$

Pour l'autre inégalité, introduisons la projection

$$\Pi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1. \end{cases}$$

Π_1 est lipschitzienne, et pour tout k , $\Pi_1(E_k) = [0, 1]$, donc $\Pi_1(F) = [0, 1]$.
On a donc

$$1 = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(\Pi_1(F)) \leq \mathcal{H}^1(F),$$

ce qui achève la preuve. \square

4.2 Ensemble triadique de Cantor

Soit $s = \log 2 / \log 3$. On montre que $1/2 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$, et on en déduit que $\dim_H F = s$.

Démonstration :

Calcul heuristique : $F_g = 1/3F = F_d$. $F = F_g \cup F_d$ (union disjointe), donc

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_g) + \mathcal{H}^s(F_d) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Si (!) pour $s = \dim_H F$, on a $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, alors on peut simplifier, donc $1 = 2 \cdot 3^{-s}$.

Calcul rigoureux : appelons «intervalles de base» les intervalles de longueur 3^{-k} qui forment E_k . E_k est la réunion de 2^k intervalles de longueur 3^{-k} :

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-ks}.$$

Avec $s = \log 2 / \log 3$, on fait tendre k vers l'infini pour avoir

$$\mathcal{H}^s(F) \leq 1.$$

Montrons maintenant que pour tout recouvrement de F ,

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}.$$

On peut supposer que les U_i sont des intervalles. F étant compact, on se ramène au cas d'un nombre fini (p) d'intervalles que l'on peut ensuite supposer fermés.

Pour $1 \leq i \leq p$, il existe k tel que $3^{-k+1} \leq |U_i| < 3^{-k}$. Ainsi, U_i rencontre au plus un intervalle de base de E_k (distants de 3^{-k}). Si $j \geq k$, alors U_i rencontre au plus $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^{-s} |U_i|^s$ intervalles de base de E_j . Avec j grand, $3^{-j+1} \leq |U_i|$ pour tout $1 \leq j \leq p$, donc

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s \quad (\text{nombre d'intervalles})$$

car $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ rencontre les 2^j intervalles de base, de longueur 3^{-j} . \square

Remarque : on peut montrer $\mathcal{H}^s(F) = 1$.

5 Définitions équivalentes de la mesure de Hausdorff

5.1 Recouvrement par des boules

On considère des recouvrements par des boules :

$$\mathcal{B}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum |B_i|^s ; (B_i) \delta\text{-recouvrement de } F \text{ par des boules}\right\}.$$

$\mathcal{B}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{B}_\delta^s(F)$ saute également de ∞ à 0.

On a évidemment $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \mathcal{B}_\delta^s(F)$, donc $\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{B}^s(F)$.

Réciproquement, si (U_i) est un (δ) -recouvrement de F , alors il en est de même pour (B_i) , où B_i est une boule contenant U_i , de rayon $|U_i| \leq \delta$. On a alors

$$\mathcal{B}_\delta^s(F) \leq 2^s \mathcal{H}_\delta^s(F),$$

et

$$\mathcal{B}^s(F) \leq 2^s \mathcal{H}^s(F).$$

Ainsi,

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{B}^s(F) \leq 2^s \mathcal{H}^s(F),$$

donc la notion de dimension obtenue est la même.

5.2 Intervalles binaires

Soient les intervalles $[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}[$, avec $k \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, \dots, 2^k - 1$.

$$\mathcal{M}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum |U_i|^s ; (U_i) \delta\text{-recouvrement de } F \text{ par des intervalles binaires}\right\}.$$

Mesure de réseau : $\mathcal{M}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{M}_\delta^s(F)$. Un intervalle U contenu dans $[0, 1[$ est contenu dans deux intervalles binaires consécutifs de longueur au plus $2|U|$:

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{M}^s(F) \leq 2^{s+1} \mathcal{H}^s(F),$$

donc la notion de dimension obtenue est la même.

Références

- [1] K. Falconer : *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 1990.
- [2] W. Rudin : *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.