Équations différentielles : exercices

Exercice 1 : différentes façons de tendre vers zéro

1. On considère l'équation différentielle

$$y' = -y \quad ; \quad y(0) = y_0.$$

Écrire la valeur de $y(t)$ pour tout t.
2. Pour y à valeurs complexes et $\alpha > 0$, on considère l'équation différentielle

$$y' = -|y|^\alpha y \quad ; \quad y(0) = y_0,$$

où $y_0 \in \mathbb{C}$.
2.a. Quel résultat d'existence peut-on utiliser ?
2.b. On pose $\rho = |y|^2$. Écrire une équation différentielle vérifiée par ρ.
2.c. En déduire que $y(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.
3. Pour y à valeurs complexes et $0 < \beta < 1$, on considère l'équation différentielle

$$y' = \frac{-y}{|y|^\beta} \quad ; \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

où $y_0 \in \mathbb{C}$.
3.a. Quel résultat d'existence peut-on utiliser ?
3.b. On pose $\rho = |y|^2$. Écrire une équation différentielle vérifiée par ρ.
3.c. En déduire qu'il existe $T > 0$ tel que toute solution $y \in C^1([0, +\infty[)$ de l'équation (1) vérifie $y(t) = 0$ pour $t \geqslant T$.

Exercice 2 : variation sur le lemme de Gronwall

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, et $M \in C([t_0, \infty[)$. On suppose qu'il existe C_0, $\eta, \delta > 0$, et $f \in L^p([t_0, \infty))$ avec $1 \leqslant p < \infty$, tels que pour tous $t' \geqslant t \geqslant t_0$,

$$M(t') \leqslant M(t) + \|f\|^\eta_{L^p([t,t'])} M(t').$$

Montrer qu'alors M est bornée : $M \in L^\infty([t_0, \infty[)$.

Indication : découper $[t_0, \infty[$ en un nombre fini d'intervalles choisis en fonction de f.

Exercice 3 : variation sur le bootstrap

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, et $h \in L^q_{\text{loc}}([t_0, \infty[)$ pour un certain $1 \leqslant q \leqslant \infty$. On suppose qu'il existe C_0, $\eta, \kappa > 0$, et $f \in L^p([t_0, \infty[)$ avec $1 \leqslant p < \infty$, tels que pour tous $t' \geqslant t \geqslant t_0$,

$$\|h\|_{L^q([t,t'])} \leqslant C_0 + \|f\|^\eta_{L^p([t,t'])} \|h\|^\kappa_{L^q([t,t'])}.$$

Montrer qu'alors h vérifie

$$h \in L^q([t_0, \infty[).$$

Indication : utiliser le lemme de bootstrap du cours sur des intervalles choisis en fonction de f, en commençant par supposer $\kappa > 1$.