VIII Equation de Schrödinger non linéaire

<u>NB</u> : tout le contenu de ce chapitre possède un analogue pour l'éq. des ondes $\partial_t^2 u - \Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u = 0$.
C'est toutefois un peu plus délicat du point de vue technique (espaces de Besov).

$$(NLS) \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \quad u_{|t=0} = u_0$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma > 0$$

<u>Hyp</u> : motivé par le chapitre précédent, on supposera $\sigma < \frac{2}{d-2}$ si $d \geq 3$

<u>But</u> : Avoir une théorie pour le problème de Cauchy dans H^1, afin (dans certains cas) d'obtenir une solution globale en temps.

1) Un résultat négatif

- $\lambda \geq 0$: estimation a priori H^1
- $\lambda < 0$: ça dépend. En particulier, on ne peut pas dire que la solution est bornée a priori dans H^1, si $\sigma \geq 2/d$.

<u>Th</u> : On suppose $\lambda < 0$ et $\sigma \geq 2/d$. Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $x \mapsto |x| u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $E(u_0) < 0$, alors (NLS) n'a pas de solution globale $u \in C([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}^d))$.

$\Sigma = H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$

<u>Lemme</u>. Soit $T>0$. On suppose $u \in C([0,T]; H^1)$ et $u_0 \in \mathcal{F}(H^1)$.

Alors $u \in C([0,T]; \Sigma)$ et si on note
$$y(t) = \int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx ,$$
on a $y \in C^1([0,T]; \mathbb{R}_+)$ et
$$y'(t) = 2\, \mathrm{Im} \int \overline{u}(t,x)\, x \cdot \nabla u(t,x) dx$$

<u>Dem</u> : on admet la première partie de l'énoncé, ainsi que la propriété $y \in C^1$. On se concentre sur le calcul formel :

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx = \int |x|^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(|u(t,x)|^2\right) dx$$
$$= 2\, \mathrm{Re} \int |x|^2 \overline{u}(t,x)\, \partial_t u(t,x) dx$$
$$= 2\, \mathrm{Re}\, (-i) \int |x|^2 \overline{u}(t,x)\, i\partial_t u(t,x) dx$$
$$= 2\, \mathrm{Im} \int |x|^2 \overline{u} \left(-\frac{1}{2}\Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u \right) dx$$
$$= -\mathrm{Im} \int |x|^2 \overline{u}\, \Delta u = -\sum_{j=1}^{d} \mathrm{Im} \int |x|^2 \overline{u}\, \partial_j^2 u$$
$$= \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Im} \int \partial_j\left(|x|^2 \overline{u} \right) \partial_j u$$
$$= \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Im} \int 2 x_j \overline{u}\, \partial_j u = 2\, \mathrm{Im} \int \overline{u}\, x \cdot \nabla u \qquad \blacksquare$$

<u>Lemme</u> : Sous les hypothèses du lemme précédent, on a de plus $y \in C^2([0,T])$ et
$$y''(t) = 2 \int |\nabla u(t,x)|^2 dx + \frac{2\lambda}{\sigma+1} d\sigma \int |u(t,x)|^{2\sigma+2} dx$$

Dem: $y''(t) = \frac{d}{dt}\left(2\,\mathrm{Im}\int \bar{u}(t,x)\, x\cdot\nabla u(t,x)\,dx\right)$

$$= 2\,\mathrm{Im}\int \partial_t \bar{u}\; x\cdot\nabla u + 2\,\mathrm{Im}\int \bar{u}\; x\cdot\nabla\partial_t u$$

$\partial_t \bar{u} = -\frac{i}{2}\Delta\bar{u} + i\lambda|u|^{2\sigma}\bar{u}$

1.) $2\,\mathrm{Im}\int \partial_t\bar{u}\; x\cdot\nabla u = -\mathrm{Re}\int\Delta\bar{u}\; x\cdot\nabla u + 2\lambda\,\mathrm{Re}\int |u|^{2\sigma}\bar{u}\, x\cdot\nabla u$

$$= -\mathrm{Re}\int \Delta \bar{u}\; x\cdot\nabla u + \lambda\int |u|^{2\sigma} x\cdot\big(\underbrace{2\,\mathrm{Re}\,\bar{u}\nabla u}_{\nabla|u|^2}\big)$$

$$= -\mathrm{Re}\int\Delta\bar{u}\, x\cdot\nabla u + \frac{\lambda}{\sigma+1}\int x\cdot\nabla\left(|u|^{2\sigma+2}\right)$$

$$= -\mathrm{Re}\int \Delta\bar{u}\, x\cdot\nabla u - \frac{\lambda d}{\sigma+1}\int|u|^{2\sigma+2}.$$

2.) $2\,\mathrm{Im}\int \bar{u}\; x\cdot\nabla\partial_t u = 2\sum_{j=1}^d \mathrm{Im}\int \bar{u}\, x_j\,\partial_j\partial_t u$

$$= -2\sum_{j=1}^d \mathrm{Im}\int \partial_j(x_j\bar{u})\,\partial_t u$$

$$= -2\sum_{j=1}^d\mathrm{Im}\int\partial_j(x_j\bar{u})\left(\frac{i}{2}\Delta u - i\lambda|u|^{2\sigma}u\right).$$

$$= -\sum_{j=1}^d \mathrm{Re}\int\partial_j(x_j\bar{u})\,\Delta u + 2\lambda\,\mathrm{Re}\sum\int\partial_j(x_j\bar{u})\,|u|^{2\sigma}u$$

3.) $\mathrm{Re}\int\Delta\bar{u}\; x\cdot\nabla u = \mathrm{Re}\sum_{j,k}\int\partial_j^2\bar{u}\; x_k\partial_k u = -\mathrm{Re}\sum_{j,k}\int u\,\partial_k\left(x_k\partial_j^2\bar{u}\right)$

$$= -\mathrm{Re}\sum_{j,k}\int u\left(\partial_j^2\bar{u} + x_k\,\partial^3_{kjj}\bar{u}\right)$$

$$= -d\,\mathrm{Re}\sum_j\int u\,\partial_j^2\bar{u} + \mathrm{Re}\sum_{j,k}\int\partial_j\left(u x_k\right)\partial^2_{jk}\bar{u}$$

$$= +d\int|\nabla u|^2 + \mathrm{Re}\sum_{j,k}\int x_k\,\partial_j u\,\partial_{jk}\bar{u} + \mathrm{Re}\sum_{j,k}\int\delta_{jk}\,u\,\partial^2_{jk}\bar{u}$$

$$= d\int|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\, Re \sum_{j,\ell} \int x_\ell\, \partial_\ell |\partial_j u|^2 + Re \sum_j \int u\, \partial_j^2 \bar u$$

$$= d\int|\nabla u|^2 - \frac{1}{2} Re \sum_{j,\ell} \int |\partial_j u|^2 - Re \sum_j \int \partial_j u\, \partial_j \bar u$$

$$= d\int|\nabla u|^2 - \frac{d}{2}\int |\nabla u|^2 - \int|\nabla u|^2 = \frac{d}{2}\int|\nabla u|^2 - \int|\nabla u|^2 .$$

4.) $$\sum_{j=1}^{d} Re\int \partial_j(x_j \bar u)\Delta u = \sum_{j,\ell} Re\int \partial_j(x_j \bar u)\partial_\ell^2 u$$

$$= \sum_{j,\ell} Re \int \bar u\, \partial_\ell^2 u + Re\int x.\nabla\bar u\ \Delta u$$

$$= -d\int|\nabla u|^2 + Re\int x.\nabla \bar u\, \Delta u$$

$$= -d\int|\nabla u|^2 + \frac{d}{2}\int|\nabla u|^2 - \int|\nabla u|^2 = \left(-\frac{d}{2}-1\right)\int|\nabla u|$$

5.) $$2Re \sum_j \int \partial_j(x_j \bar u)\ |u|^{2\sigma} u = 2Re\sum_j \int (\bar u + x_j\,\partial_j \bar u)|u|^{2\sigma} u$$

$$= 2d\int|u|^{2\sigma+2} + \int x_j\,|u|^{2\sigma}\underbrace{2Re(u\,\partial_j\bar u)}_{\partial_j|u|^2} = 2d\int|u|^{2\sigma+2} + \frac{1}{\sigma+1}\sum_j\int x_j\partial_j |u|$$

$$= \left(2d - \frac{d}{\sigma+1}\right)\int|u|^{2\sigma+2}.$$

<u>Ccl</u>: $$y''(t) = -\frac{d}{2}\int|\nabla u|^2 + \int|\nabla u|^2 - \frac{\lambda d}{\sigma+1}\int|u|^{2\sigma+2}$$

$$+\frac{d}{2}\int|\nabla u|^2 + \int|\nabla u|^2 + 2d\lambda\int|u|^{2\sigma+2} - \frac{d\lambda}{\sigma+1}\int|u|^{2\sigma+2}$$

$$= 2\int|\nabla u|^2 + 2d\lambda\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sigma+1}\right)}_{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\int|u|^{2\sigma+2}$$

Comme $E = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$, on a

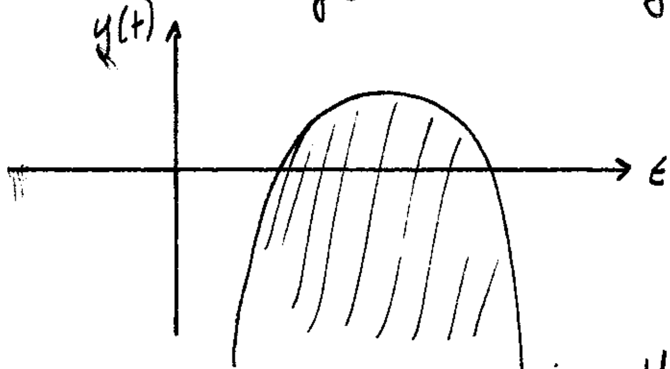
$$y''(t) = 4E - \frac{4\lambda}{\sigma+1}\int |u(t,x)|^{2\sigma+2}dx + \frac{2\lambda d\sigma}{\sigma+1}\int |u|^{2\sigma+2}$$

$$= 4E + \frac{2\lambda}{\sigma+1}(d\sigma - 2)\int |u(t,x)|^{2\sigma+2}dx$$

Rappel: . $\sigma \geq 2/d$ et $\lambda < 0$: $y''(t) \leq 4E$.

. $E<0$: $y'(t) \leq 4Et + y'(0)$

$y(t) \leq 2Et^2 + y'(0)t + y(0)$



$t \gg 1 \Rightarrow y(t) < 0$: impossible car $y \geq 0$ par définition

$\Rightarrow y$ ne peut être C^2 sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow u \notin C(\mathbb{R}_+, H^1)$.

Rq: $u_0 \in \Sigma$ donné : u_0^λ avec CI λu_0, $|\lambda| \gg 1 \Rightarrow E(u^\lambda) < 0$.

2) Inégalités de Strichartz

Proposition (inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev)

Soient $0 < \rho < 1$, $1 < r < q < \infty$, avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \rho$

Alors pour toute $f \in L^r(\mathbb{R})$, on a $|t|^{-(1-\rho)} * f \in L^q(\mathbb{R})$ et $\exists C > 0$ /

$\forall f \in L^r$, $\| |t|^{-(1-\rho)} * f \|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^r}$

On admet le résultat.

<u>Rq</u> : il s'agit d'une généralisation de l'inégalité d'Young

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|g\|_{L^p} \|f\|_{L^r} \quad \text{si} \quad 1+\frac{1}{q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{r}$$

$$g(t) = |t|^{-(1-\rho)} \quad \text{et} \quad 1+\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1-\rho \ : g \in L^{\frac{1}{1-\rho}}(\mathbb{R}) \, ?$$

$$g(t)^{\frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{|t|} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

En fait, $g \in L_f^{\frac{1}{1-\rho}}(\mathbb{R})$, où $L_f^p(\mathbb{R}) = \Big\{ g$ mesurable /

$$\exists C / \forall \lambda > 0, \ \text{mes}\, \{ x \,/\, |g(x)|^p > \lambda \} \leq \frac{C}{\lambda} \Big\}$$

$L_f^p(\mathbb{R})$ généralise $L^p(\mathbb{R})$: Bienaymé - Tchebytchev,

$$\text{mes}\, \{ x \,/\, |g(x)|^p > \lambda \} \leq \frac{\|g\|_{L^p}^p}{\lambda}$$

$$\lambda \underbrace{\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\lambda < |g(x)|^p}\, dx}_{\text{mes}\{x / |g(x)|^p > \lambda\}} \leq \int |g(x)|^p \, 1\!\!1_{\lambda < |g(x)|^p}\, dx \leq \|g\|_{L^p}^p$$

Equation de Schrödinger inhomogène : $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = F$; $u|_{t=0} = u_0$

On s'intéresse plutôt à la formulation de Duhamel :

$$u(t) = U(t) u_0 \underbrace{- i \int_0^t U(t-s) F(s) ds}_{R(F)(t,x)} \quad ; \quad U(t) = e^{i\frac{t}{2}\Delta} \text{ groupe libre}$$

<u>Déf</u> : un couple (p, q) est admissible si $2 \leq q < 2^*$ $(d \geq 2)$ $(2 \leq q \leq \infty$ si $d = 1)$ et $\frac{2}{p} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$.

Th (inégalités de Strichartz) $d \geq 1$

1) Soit (p,q) un couple admissible. Il existe C_q /

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \; \| U(\cdot)\phi \|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_q \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

2) Soient (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux couples admissibles. Soit I un intervalle de temps contenant 0. Il existe $C_{q_1 q_2}$ /

$$\forall F \in L^{p_2'}(I, L^{q_2'}(\mathbb{R}^d)), \; \| R(F)\|_{L^{p_1}(I, L^{q_1}(\mathbb{R}^d))} \leq C_{q_1 q_2} \|F\|_{L^{p_2'}(I; L^{q_2'}(\mathbb{R}^d))}$$

Rq : . Le point 1) impose la relation $\frac{2}{p} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$.

Soit $v(t,x) = U(t)\phi(x)$: $i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = 0$; $v_{|t=0} = \phi$

Pour $\lambda > 0$, on introduit

$$v_\lambda(t,x) = v(\lambda^2 t, \lambda x).$$

$\rightsquigarrow$ $i\partial_t v_\lambda + \frac{1}{2}\Delta v_\lambda = 0$; $v_{\lambda|t=0} = \phi_\lambda$, où $\phi_\lambda(x) = \phi(\lambda x)$.

Si 1) est vraie pour v, elle l'est pour v_λ $\forall \lambda > 0$:

$$\| v_\lambda \|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^d))} \leq \underbrace{C_q}_{\text{ind. } \lambda} \|\phi_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\|\phi_\lambda\|_{L^2}^2 = \int |\phi(\lambda x)|^2 dx = \lambda^{-d} \int |\phi(\lambda x)|^2 \lambda^d dx$$
$$= \lambda^{-d} \|\phi\|_{L^2}^2 \quad : \quad \|\phi_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{-d/2} \|\phi\|_{L^2}$$

$$\|v_\lambda(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^q = \int |v(\lambda^2 t, \lambda x)|^q dx = \lambda^{-d} \|v(\lambda^2 t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^q$$

$$\|v_\lambda(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-d/q} \|v(\lambda^2 t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\|v_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))} = \lambda^{-dp/q} \int_{\mathbb{R}} \|v(\lambda^2 t)\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)}\, dt \qquad \tau = \lambda^2 t$$

$$= \lambda^{-dp/q} \lambda^{-2} \int \|v(\tau)\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)}\, d\tau$$

$$= \lambda^{-dp/q-2} \|v\|^p_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))}.$$

$$\lambda^{-\frac{d}{q}-\frac{2}{p}} \|v\|_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_q \lambda^{-d/2} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\forall \lambda>0,\ \|v\|_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_q \lambda^{\frac{2}{p}-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$\Rightarrow$ possible uniquement si $\frac{2}{p} = d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)$ (sinon : $\lambda \to 0$ ou $\lambda \to +\infty$).

. Dans 2) : . même intervalle de temps I des deux côtés.
. les couples (p_1, q_1) et (p_2, q_2) sont <u>indépendants l'un de l'autre</u>

. Rappel : $t \neq 0$, $U(t) : L^q(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ ssi $q=2$.
ie $\|U(t)\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$.

$U(t) : L^2 \to L^2$ (unitaire)
1) mq même si $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ "uniquement", alors p.p. $t \in \mathbb{R}$, $U(t)\phi \in L^q(\mathbb{R}^d)$

$\leadsto$ effet régularisant (moins fort que pour la chaleur).

. $C_2 = 1 = C_{22}$.

. Historiquement : restriction de la transformée de Fourier à une hypersurface

Etapes de la preuve

1) Fourier permet de voir : $\|U(t)\phi\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Fonction de Green : $U(t)\phi(x) = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}} \phi(y)\,dy$

$\Rightarrow \|U(t)\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{|2\pi t|^{d/2}} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Riesz-Thorin : $\|U(t)\phi\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{|2\pi t|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}} \|\phi\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^d)}$
$\forall r \in [2, \infty]$

2) Par dualité, 1) équivalent à :

$$\left\| \int U(-s)F(s)\,ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|F\|_{L^{p'}(\mathbb{R};L^{q'}(\mathbb{R}^d))}.$$

3) Méthode TT^* (analyse harmonique) :

$$\left| \iint \langle U(-s)F(s), U(-t)G(t) \rangle\,ds\,dt \right| \leq C \|F\|_{L^{p'}L^{q'}} \|G\|_{L^{p'}L^{q'}}$$

Par symétrie $\iint_{s<t}$ suffit

4) $|\langle U(-s)F(s), U(-t)G(t)\rangle| = |\langle U(t-s)F(s), G(t)\rangle|$

$$\leq \|U(t-s)F(s)\|_{L^q} \|G(t)\|_{L^{q'}}$$

$$\leq C \frac{1}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|F(s)\|_{L^{q'}} \|G(t)\|_{L^{q'}}$$

5) $\left|\iint_{s<t}\right| \leq C \iint_{s<t} \frac{1}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|F(s)\|_{L^{q'}} \|G(t)\|_{L^{q'}}\,ds\,dt$

$$\leq C \int_t \|F\|_{L^{q'}} * |t|^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|G(t)\|_{L^{q'}}\,dt$$

$$\leq C \, \|G\|_{L^{p'}L^{q'}} \left\| \, \|F\|_{L^{q'}_x} * |t|^{-d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \right\|_{L^p_t}$$

HLS : $r = p'$, $1-\rho = d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right) = \frac{2}{p}$: $\rho = 1-\frac{2}{p} < 1$

($\rho = 1 \iff p = \infty$: $L^\infty L^2$ immédiat)

$\rho > 0$: $p < 2 \iff d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right) < 1 \iff \frac{1}{q} > \frac{1}{2}-\frac{1}{d} = \frac{d-2}{2d} = \frac{1}{2^*}$

$$\leq C \, \|G\|_{L^{p'}L^{q'}} \, \|F\|_{L^{p'}L^{q'}} \text{, car } \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{p'} - \rho = \frac{1}{p'} - 1 + \frac{2}{p} = \frac{1}{p}$$

6) Preuve de 2) : on n'en parle pas.

3) Application 1 : NLS sous-critique L^2

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \quad u_{|t=0} = u_0$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

Prop : on suppose $\sigma < 2/d$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
Il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, L^2) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^d))$ de (NLS). De plus, $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Rq : . besoin de $L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^d))$ pour pouvoir énoncer l'unicité.

. $L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}_{loc}$: en général, pas mieux.

. le signe de λ n'intervient pas : hypothèse $\sigma < 2/d$.

. on n'a pas forcément $\sigma \in \mathbb{N}^*$. En fait, $\sigma \in \mathbb{N}^*$ ssi $d = \sigma = 1$...

(*) reprendre les qdes lignes

<u>Lemme</u> : $\exists\ \tau > 0$ ne dépendant que de σ, d, $|\lambda|$ et $\|u_0\|_{L^2}$ et une unique sol. $u \in C([-\tau, \tau]; L^2) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau,\tau]; L^{2\sigma+2})$

<u>Dem</u> : Sens de la solution : Duhamel, ie résoudre.

$$u(t) = \underbrace{U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-s)\left(|u|^{2\sigma}u\right)(s)\,ds}_{\Phi(u)(t)}.$$

But : trouver un point fixe pour Φ.

$$X(\tau) = \Big\{ u \in C([-\tau,\tau]; L^2) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau,\tau]; L^{2\sigma+2}) \ /$$

$$\|u\|_{L^\infty([-\tau,\tau];L^2)} \leq 2\|u_0\|_{L^2}$$

$$\|u\|_{L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau,\tau];L^{2\sigma+2})} \leq 2\, C_{2\sigma+2} \|u_0\|_{L^2} \Big\}$$

Strichartz

On montre : si $\tau > 0$ est suffisamment petit, alors $\Phi : X(\tau) \to X(\tau)$ et réalise une contraction.

* $p = \frac{4\sigma+4}{d\sigma}$; $q = 2\sigma+2$: (p,q) est admissible
* $\frac{1}{q'} = \frac{2\sigma+1}{q}$; $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2\sigma}{k}$, avec $k = \frac{4\sigma(\sigma+1)}{2-(d-2)\sigma}$.
* $\sigma < 2/d \Rightarrow k < p$

En effet : $k < p \iff d\sigma^2 < 2 - (d-2)\sigma$
$\iff d\sigma^2 + (d-2)\sigma - 2 < 0.$

$$\Delta = (d-2)^2 + 8 = (d+2)^2 \ : \ \sigma_- = \frac{2-d-(d+2)}{2d} = -1$$

$$\sigma_+ = \frac{2-d+d+2}{2d} = \frac{2}{d}$$

et $\sigma \in]\sigma_-, \sigma_+[$

<u>Stabilité</u> :

Soit $u \in X(\tau)$:

$$* \ \|\phi(u)\|_{L^\infty([-\tau,\tau];L^2)} \leq \|U(\cdot)u_0\|_{L^\infty([-\tau,\tau],L^2)} + \|R(|u|^{2\sigma}u)\|_{L^\infty([-\tau,\tau],L^2)}$$

$$\leq \|u_0\|_{L^2} + \underbrace{C_{2q}}_{\text{Strichartz}} \| |u|^{2\sigma} u\|_{L^{p'}([-\tau,\tau];L^{q'})}$$

Hölder : $\| |u|^{2\sigma} u \|_{L^{p'}L^{q'}} \leq \|u\|^{2\sigma}_{L^k L^q} \|u\|_{L^p L^q}$

$$\|\phi(u)\|_{L^\infty_\tau L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + C_{2q} \|u\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q} \underbrace{\|u\|_{L^p_\tau L^q}}_{\leq 2 C_q \|u_0\|_{L^2} \text{ car } u \in X(\tau)}$$

$$\|u\|_{L^k_\tau L^q} \leq \|1\|_{L^\theta([-\tau,\tau])} \|u\|_{L^p([-\tau,\tau],L^q)}$$

où $\frac{1}{k} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p}$: $k < p \Rightarrow \theta > 0$

$$\leq (2\tau)^{1/\theta} \|u\|_{L^p_\tau L^q}$$

$$\Rightarrow \|\phi(u)\|_{L^\infty_\tau L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + C_{2q} \left(2 C_q \|u_0\|_{L^2}\right)^{2\sigma+1} (2\tau)^{2\sigma/\theta}$$

$$\leq 2\|u_0\|_{L^2} \quad \text{si} \quad \tau > 0 \text{ est assez petit.}$$

* $\|\phi(u)\|_{L^p([-\tau,\tau],L^q)} \leq \|U(\cdot)u_0\|_{L^p_\tau L^q} + \|R(|u|^{2\sigma}u)\|_{L^p_\tau L^q}$

$$\leq C_q \|u_0\|_{L^2} + C_{qq} \underbrace{\| |u|^{2\sigma} u\|_{L^{p'}_\tau L^{q'}}}_{\text{comme avant}}$$

$$\leq C_q \|u_0\|_{L^2} + C_{qq} \left(2C_q\|u_0\|_{L^2}\right)^{2\sigma+1} (2\tau)^{2\sigma/\theta}$$

$\Rightarrow$ quitte à prendre τ encore plus petit : ϕ envoie $X(\tau)$ dans $X(\tau)$.

<u>Contraction</u>

$u, w \in X(\tau)$:

$$\|\phi(u)-\phi(w)\|_{L^\infty([-\tau,\tau],L^2)} = \|R(|u|^{2\sigma}u) - R(|w|^{2\sigma}w)\|_{L^\infty([-\tau,\tau],L^2)}$$

$$= \|R(|u|^{2\sigma}u - |w|^{2\sigma}w)\|_{L^\infty([-\tau,\tau],L^2)}$$

$$\leq C_{2q} \| |u|^{2\sigma}u - |w|^{2\sigma}w\|_{L^{p'}([-\tau,\tau],L^{q'})}$$

Fait : $\exists C \,/\, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\left| |z_1|^{2\sigma}z_1 - |z_2|^{2\sigma}z_2 \right| \leq C\left(|z_1|^{2\sigma} + |z_2|^{2\sigma}\right)|z_1 - z_2|$

Expl : $g(z) = |z|^{2\sigma}z$: $|g'(z)| \leq C|z|^{2\sigma}$

et $|\alpha+\beta|^{2\sigma} \leq C\left(|\alpha|^{2\sigma} + |\beta|^{2\sigma}\right)$

$$\leq C \left\| \left(|u|^{2\sigma} + |w|^{2\sigma}\right)|u-w| \right\|_{L^{p'}([-\tau,\tau],L^{q'})}$$

$$\leq C \left(\|u\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q} + \|w\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q} \right) \|u-w\|_{L^p_\tau L^q}$$

$$\leq \underbrace{C \tau^{2\sigma/\theta}\, 2\left(2C_q\|u_0\|_{L^2}\right)^{2\sigma}}_{\leq \frac{1}{2} \text{ si } 0<\tau \ll 1} \|u-w\|_{L^p_\tau L^q}$$

Idem $\|\phi(u)-\phi(w)\|_{L^p([-\tau,\tau];L^q)} \Rightarrow$ lemme $\blacksquare$

$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = |u|^{2\sigma} u$: formellement, $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 0$

$\Rightarrow$ on peut appliquer le lemme un nombre infini de fois, ce qui donne la proposition (à l'unicité près).

NB : on part de L^2 (qui n'est pas une algèbre), et on résout une EDP NL : inégalités de Strichartz.

Unicité : u, w sol. D'après leur régularité, on peut trouver $0 < \tau \ll 1$ de sorte que $u, w \in X(\tau)$.
Or pour $0 < \tau \ll 1$, la sol. est unique dans $X(\tau)$ (car sol. = point fixe de Φ) $\Rightarrow$ unicité dans la proposition ∎

4) Application 2 : NLS critique L^2 avec données petites

Cas limite : $\sigma = \frac{2}{d}$ $\qquad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{4/d} u$; $u_{|t=0} = u_0$.
$\lambda \in \mathbb{R}$

Prop : $\exists\, \varepsilon > 0$ / si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\|u_0\|_{L^2} \leq \varepsilon$, alors il existe une unique solution
$u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$
$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Rq : . on a vu que pour $d = 1$, $\lambda < 0$, il peut y avoir explosion en temps fini : hyp. $\|u_0\|_{L^2} \ll 1$ nécessaire dans ce cas.
. questions (encore) ouvertes : . $\lambda > 0$ et $\|u_0\|_{L^2}$ qcq ?
. $\lambda < 0$: taille limite ?
. intégrabilité globale en temps.

Dem : on reprend l'approche du cas $\sigma < \frac{2}{d}$: $p = q = k = 2 + \frac{4}{d}$.
(à détailler)

$$\|\phi(u)\|_{L^\infty_t L^2} \leq \|u_0\|_2 + C_{2q} \|u\|_{L^q L^2}^{2\sigma+1} = \|u_0\|_2 + C_q \|u\|_{L^q L^2}^{1+4/d}.$$

$$\leq \|u_0\|_2 + \underbrace{C_{2q}\left(2C_q\|u_0\|_2\right)^{1+4/d}}_{\leq \|u_0\|_2 \text{ si } \|u_0\|_2 \ll 1.}$$

idem $\|\phi(u)\|_{L^p_t L^q} \rightsquigarrow$ stabilité si $\|u_0\|_2 \ll 1$.

Contraction :

$$\|\phi(u)-\phi(w)\|_{L^\infty([-\tau,\tau];L^2)} \leq C_{2q}\left(\|u\|_{L^p L^q}^{2\sigma} + \|w\|_{L^p L^q}^{2\sigma}\right)\|u-w\|_{L^p L^q}$$

$$\leq \underbrace{C_{2q}\, 2\left(2C_q\|u_0\|_2\right)^{2\sigma}}_{\leq \frac{1}{2} \text{ si } \|u_0\|_2 \ll 1} \|u-w\|_{L^p L^q}$$

Idem $\|\phi(u)-\phi(w)\|_{L^p L^q}$.

Pour conclure : on ne voit jamais apparaître τ $\rightsquigarrow$ on peut appliquer ce raisonnement dans

$$X = \Big\{ u \in C(\mathbb{R};L^2) \cap L^{2+\frac{4}{d}}\left(\mathbb{R};L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^d)\right) \Big/ \; \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R};L^2)} \leq 2\|u_0\|_2, \; \|u\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leq 2C_{2+\frac{4}{d}}\|u_0\|_2 \Big\}$$

<u>Unicité</u> : soient u et w deux solutions : $u=\phi(u)$ et $w=\phi(w)$

$$\|u-w\|_{L^p([-\tau,\tau];L^q)} = \|\phi(u)-\phi(w)\|_{L^p_t L^q} = \|\phi(u)-\phi(w)\|_{L^{2+\frac{4}{d}}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq C_{2,2+\frac{4}{d}} \left(\|u\|^{2\sigma}_{L^{2+\frac{4}{d}}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)} + \|w\|^{2\sigma}_{L^{2+\frac{4}{d}}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)} \right) \|u-w\|_{L^{2+\frac{4}{d}}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)}$$

Comme $u, w \in L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ $\left(L^p_{loc}(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d)) \text{ suffirait} \right)$,

$$\|u\|_{L^{2+4/d}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)} + \|w\|_{L^{2+4/d}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[\tau\to 0]{} 0 .$$

$\Rightarrow$ pour $0<\tau \ll 1$, $\|u-w\|_{L^{2+4/d}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2} \|u-w\|_{L^{2+4/d}([-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d)}$

$\Rightarrow u \equiv w$ sur $[-\tau,\tau]\times\mathbb{R}^d$.

On peut alors répéter l'opération sur $[0, 2\tau]$, puis $[\tau, 3\tau]$, etc.., pour conclure $u \equiv w$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$.

5) Application 3 : NLS dans H^1

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \; u_{|t=0} = u_0$$

On suppose $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$

Sur σ : $\sigma < \frac{2}{d-2}$ si $d \geq 3$.

Explication : conservations

Formellement, $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{\lambda}{\sigma+1}\|u(t)\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}}}_{\text{énergie potentielle}} \Big) = 0$$

G.-N. : $\|u\|_{L^{2\sigma+2}} \leq C \|u\|^{1-\delta}_{L^2} \|\nabla u\|^{\delta}_{L^2}$, $\delta = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma+2}\right) = \frac{d\sigma}{2\sigma+2}$

$\boxed{\text{Si}}$ $\sigma < \frac{2}{d-2}$

Le cas $\sigma = \frac{2}{d-2}$ $(d \geq 3)$ est plus difficile : comme le cas $\sigma = \frac{2}{d}$ dans le cadre $L^2(\mathbb{R}^d)$.

<u>Lemme</u> $\exists\, \tau > 0$ ne dépendant que de $\sigma, d, |\lambda|$ et $\|u_0\|_{H^1}$ et une unique sol. $u \in C([-\tau,\tau], H^1) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau,\tau], L^{2\sigma+2})$ avec $\nabla u \in L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau,\tau], L^{2\sigma+2})$

<u>Dém</u> : $Y(\tau) = \Big\{ u \in X(\tau) \,/\, \nabla u \in C([-\tau,\tau], L^2) \cap L^p([-\tau,\tau]; L^q)$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty([-\tau,\tau]; L^2)} \leq 2 \|\nabla u_0\|_{L^2}$$

$$\|\nabla u\|_{L^p_\tau L^q} \leq 2\, C_{2\sigma+2} \|\nabla u_0\|_{L^2} \Big\}$$

- $p = \frac{4\sigma+4}{d\sigma}$, $q = 2\sigma+2$: (p,q) est admissible
- $\frac{1}{q'} = \frac{2\sigma+1}{q}$; $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2\sigma}{k}$, $k = \frac{4\sigma(\sigma+1)}{2-(d-2)\sigma}$
- $k < p \iff \sigma < 2/d$: si $2/d \leq \sigma < 2/(d-2)$, on a $k > p$.

<u>1er cas</u> : $\sigma < 2/d$: on peut reprendre le calcul sous-critique L^2.

→ <u>Cas général</u> :

$$\|\phi(u)\|_{L^\infty_\tau L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + \||u|^{2\sigma} u\|_{L^{p'}_\tau L^{q'}} \leq \|u_0\|_{L^2} + C_{2q} \|u\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q} \|u\|_{L^p_\tau L^q}$$
$$\leq \|u_0\|_{L^2} + C\left(2 C_q \|u_0\|_{L^2}\right) \|u\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q}$$

Rappel : Sobolev, $\|u(t)\|_{L^q} \leq C \|u(t)\|_{H^1}$

$$\|\phi(u)\|_{L^\infty_\tau L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + C \|u\|^{2\sigma}_{L^k_\tau H^1} \leq \|u_0\|_{L^2} + C\, \tau^{2\sigma/k} \|u\|^{2\sigma}_{L^\infty_\tau H^1}$$
$$\leq \|u_0\|_{L^2} + C\, \tau^{2\sigma/k}\, C(\|u_0\|_{H^1}).$$

De même, $\|\phi(u)\|_{L^p_\tau L^q} \leq C_q \|u_0\|_{L^2} + C\tau^{2\sigma/k} C(\|u_0\|_{H^1})$.

Reste le gradient : $\phi(u)(t) = U_0(t)\varphi - i\lambda\int_0^t U_0(t-s)(|u|^{2\sigma}u)(s)ds$

$$\nabla\phi(u)(t) = U_0(t)\nabla\varphi_0 - i\lambda\int_0^t U_0(t-s)\nabla(|u|^{2\sigma}u)(s)ds$$

où on a utilisé $[\nabla, U_0(t)] = 0$: évident côté Fourier.

$$\begin{aligned}\|\nabla\phi(u)\|_{L^\infty L^2} &\leq \|\nabla\varphi_0\|_{L^2} + |\lambda| C_{2q} \|\nabla(|u|^{2\sigma}u)\|_{L^{p'}_\tau L^{q'}} \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2} + C \| |u|^{2\sigma} |\nabla u| \|_{L^{p'}_\tau L^{q'}} \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2} + C\|u\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q} \|\nabla u\|_{L^p_\tau L^q} \\ &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2} + C\tau^{2\sigma/k} C(\|u_0\|_{H^1})\end{aligned}$$

$$\|\nabla\phi(u)\|_{L^p_\tau L^q} \leq C_q\|\nabla u_0\|_{L^2} + C\tau^{2\sigma/k} C(\|u_0\|_{H^1})$$

Cl : $0 < \tau \leq \tau_* \ll 1 \Rightarrow \phi$ envoie $Y(\tau)$ dans lui-même.

Remarque importante : $(Y(\tau), \| \ \|_{L^p_\tau L^q})$ est complet.

En effet : u_n suite de Cauchy pour $\| \ \|_{L^p_\tau L^q}$ cv dans $L^p_\tau L^q$

$$\|u_n - u\|_{L^p_\tau L^q} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$u_n \in$ boule de $L^\infty_\tau H^1$: une sous-suite cv $C_\tau H^1$, ie $u_{\varphi(n)} \to v$, $v \in C_\tau H^1$.

Unicité ($\mathcal{D}'$) : $v = u$.

$\nabla u_n \in$ boule $L^p_\tau L^q$: idem

Cl : toute suite de Cauchy cv ($\| \ \|_{L^p_\tau L^q}$) vers un élément de $Y(\tau)$.

Ainsi, il suffit de montrer la contraction pour $\| \ \|_{L^p_\tau L^q}$.

$$\|\phi(u_1)-\phi(u_2)\|_{L^p_\tau L^q} \leq C\| |u_1|^{2\sigma}u_1 - |u_2|^{2\sigma}u_2\|_{L^{p'}_\tau L^{q'}}$$

comme dans le cas $\sigma < 2/d$:

$$\leq C\left(\|u_1\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q} + \|u_2\|^{2\sigma}_{L^k_\tau L^q}\right)\|u_1-u_2\|_{L^p_\tau L^q}$$

$$\leq \underbrace{C\,\tau^{2\sigma/k}\left(\|u_1\|^{2\sigma}_{L^\infty H^1} + \|u_2\|^{2\sigma}_{L^\infty H^1}\right)}_{\leq 1/2 \text{ si } \tau \ll 1}\|u_1-u_2\|_{L^p_\tau L^q}$$

$\Rightarrow$ le schéma de Picard cv dans $Y(\tau)$ $\blacksquare$

<u>Prop</u> : $\sigma > 0$ avec $\sigma < \frac{2}{d-2}$ si $d \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Il existe une unique sol. $u \in C([0,+\infty[, H^1) \cap L^p_{loc}(\mathbb{R}_+, L^q)$ avec $\nabla u \in L^p_{loc}([0,+\infty[, L^q)$ dans les cas suivants :

- $\lambda \geq 0$
- $\lambda < 0$ et $\sigma < 2/d$
- $\lambda < 0$, $\sigma = \frac{2}{d}$ et $\|u_0\|_{L^2}$ assez petite
- $\lambda < 0$, $\sigma > 2/d$ et $\|u_0\|_{H^1}$ assez petite

<u>Dem</u> : estimations a priori sur $\|u\|_{H^1}$. Partie L^2 OK $\rightsquigarrow$ ∇u dans L^2 ?

- $\lambda \geq 0$: énergie OK
- $\lambda < 0$ et $\sigma < 2/d$: $\|u\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}} \leq C\|u\|^{2\sigma+2-d\sigma}_{L^2}\|\nabla u\|^{d\sigma}_{L^2} \leq C\|\nabla u\|^{d\sigma}_{L^2}$

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} \leq 2|E| + C\|\nabla u\|^{d\sigma}_{L^2} \xrightarrow{\|u_0\|_{L^2}} \nabla u \in L^\infty H^1.$$

- $\lambda < 0$ et $\sigma = 2/d$: $\|\nabla u\|^2_{L^2} \leq 2|E| + \underbrace{C\|u_0\|^{4/d}}_{\leq 1/2 \text{ si } (\ldots)}\|\nabla u\|^2_{L^2}$

- $\lambda < 0$ & $\sigma > 2/d$: $\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq 2|E| + C\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{d\sigma/2}$

$\theta = \frac{d\sigma}{2} > 1$. $E \xrightarrow[\|u_0\|_{H^1} \to 0]{} 0$

Bootstrap ...