VII Analyse non linéaire

Perturbation des équations linéaires « connues »

ex : 1) $(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0 \rightsquigarrow (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = \lambda u^p$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

(relativité : $d = 3 = p$)

2) $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \rightsquigarrow i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = |u|^{2\sigma} u$, $\sigma > 0$

(Maxwell en temps diffractif ; laser)

NB : les EDP linéaires étudiées dans le chapitre précédent se ramènent toutes à de l'ordre 1 en temps

onde : $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \rightsquigarrow \underline{U} = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$: on double le nb d'inconnues.

Après résolution : $u(t, x) = G(t)u(0, x)$, G groupe.

1) Equation inhomogène

Typiquement, $F = F(t, x)$

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = F \; ; \; \partial_t u - \Delta u = F \; ; \; (\partial_t^2 - \Delta)u = F$$

ex : $\partial_t u - \Delta u = F$. Supposons $F \in C(\mathbb{R}, \mathcal{S})$: Fourier.

$$\partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = \hat{F} \; ; \; \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi)$$

$\rightarrow$ EDO inhomogène (...)

$$\partial_t\left(e^{t|\xi|^2}\hat{u}\right) = e^{t|\xi|^2}\hat{F}$$

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2}\hat{F}(s, \xi)\,ds$$

FIF : $u(t, x) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-s)F(s, x)\,ds$.

Formule de Duhamel.

ex : • formule de Duhamel pour $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = F$

$$u(t,x) = U(t)\, u_0(x) - i\int_0^t U(t-s)\, F(s,x)\, ds.$$

• $(\partial_t^2 - \Delta) u = F$: $\underline{U} = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \rightsquigarrow \partial_t \underline{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \underline{U} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$

Duhamel : $\underline{u}(t,x) = U(t)\, \underline{u}_0(x) + \int_0^t U(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ F(s,x) \end{pmatrix} ds$

multiplication, côté Fourier, par $\begin{pmatrix} \cos(t|\xi|) & \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \\ -|\xi|\sin(t|\xi|) & \cos(t|\xi|) \end{pmatrix}$

Principe général : pour ce type d'EDP (le groupe linéaire est « connu »), on résout plutôt l'équation sous formulation de Duhamel.

→ donne un sens à la notion de sol. pour une régularité pas forcément élevée.

→ construction par argument de point fixe (Picard).

On considère donc : $u(t,x) = G(t)\, u_0(x) + \int_0^t G(t-s) F(s,x)\, ds$ (*)

<u>Hypothèse 1</u> : Pour $s \in \mathbb{R}$, $T > 0$, le groupe G est continu $[0,T] \to \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^d))$

ie $\exists C / \forall f \in H^s$, $\sup_{0 \leq t \leq T} \| G(t) f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{H^s}$

ex : chaleur, Schrödinger, ondes.

<u>Th</u> : Supposons l'hypothèse 1 satisfaite, et soient $s \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ comme dans l'hypothèse. On suppose $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$.
Si $F \in L^1([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ (ie $t \mapsto \|F(t)\|_{H^s} \in L^1([0,T])$)
alors (*) possède une unique solution $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d))$.

<u>Dem</u> : résultat d'unicité : $\cancel{u_1^{(s)}(t) = G(t)u_0(x) + \int_0^t G(}$ immédiat

existence : juste besoin de vérifier la régularité $u \in C([0,T], H^s)$.

$$u(t,x) = G(t)u_0(x) + \int_0^t G(t-s)\,F(s)\,ds$$

1) $(t,x) \longmapsto G(t)u_0(x) \in C([0,T], H^s)$ par hypothèse, puisque $u_0 \in H$

2) $(t,x) \longmapsto \int_0^t G(t-\tau)\,F(\tau)\,d\tau$?

$$\int_0^t G(t-\tau)\,F(\tau)\,d\tau = \int_0^t G(t)\,G(-\tau)\,F(\tau)\,d\tau$$

$$= G(t)\int_0^t G(-\tau)\,F(\tau)\,d\tau$$

D'après l'hyp. 1, il suffit de montrer $(t,x) \longmapsto \int_0^t G(-\tau)\,F(\tau)\,d\tau \in C([0,T], H$

$\tau \longmapsto G(-\tau)\,F(\tau) \in L^1([0,T], H^s)$,

car $\|G(-\tau)F(\tau)\|_{H^s} \leq c\,\|F(\tau)\|_{H^s} \in L^1([0,T])$

CVD $\Rightarrow (t,x) \longmapsto \int_0^t G(-\tau)F(\tau)\,d\tau \in C([0,T], H^s)$.

<u>2) Problème non linéaire</u> :

Maintenant, $F = F(u)$. Rappel : si $s > d/2$, alors $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

<u>Prop</u> : $s > d/2$: $H^s(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre. $\exists c > 0 \,/\, \forall u, v \in H^s$,

$$\|uv\|_{H^s} \leq c\,\|u\|_{H^s}\,\|v\|_{H^s}.$$

<u>Dem</u> : $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\|uv\|_{H^s}^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s}\,|\widehat{uv}(\xi)|^2\,d\xi$$

$$|\widehat{uv}| = (2\pi)^{-d/2}\,|\hat{u} * \hat{v}| = (2\pi)^{-d/2}\left|\int \hat{u}(\eta)\,\hat{v}(\xi-\eta)\,d\eta\right|$$

On distingue : $\hat{u} = \dfrac{\hat{f}}{\langle \xi \rangle^s}$, $\hat{f} \in L^2$ car $u \in H^s$

$\hat{v} = \dfrac{\hat{g}}{\langle \xi \rangle^s}$, $\hat{g} \in L^2$, et $\quad |f|_{L^2} = |\hat{f}|_{L^2} = |u|_{H^s} \;;\; |\hat{g}|_{L^2} = |v|_{H^s}$

$$|\widehat{uv}| \leq c \int \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle\eta\rangle^s} \frac{\hat{g}(\xi-\eta)}{\langle\xi-\eta\rangle^s} \right| d\eta \leq c \Bigg(\underbrace{\int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}}}_{①} + \underbrace{\int_{|\eta| > \frac{|\xi|}{2}}}_{②} \Bigg)$$

Dans ① : $|\xi - \eta| \geq \big|\, |\xi| - |\eta| \,\big| \geq \frac{|\xi|}{2}$

$$\Rightarrow \langle \xi - \eta \rangle \geq c \langle \xi \rangle$$

On a alors

$$\int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} |\quad| \leq \frac{c}{\langle\xi\rangle^s} \left(\frac{|\hat{f}|}{\langle\xi\rangle^s} * |\hat{g}| \right)$$

Dans ② : $\langle \eta \rangle \geq c \langle \xi \rangle$

$$\int_{|\eta| > \frac{|\xi|}{2}} \leq \frac{c}{\langle\xi\rangle^s} \left(|\hat{f}| * \frac{|\hat{g}|}{\langle\xi\rangle^s} \right)$$

Il reste : $\|uv\|_{H^s} = \|\langle\xi\rangle^s \widehat{uv}\|_{L^2}$

$$\leq C \left(\left\| \frac{|\hat{f}|}{\langle\xi\rangle^s} * \hat{g} \right\|_{L^2} + \left\| |\hat{f}| * \frac{|\hat{g}|}{\langle\xi\rangle^s} \right\|_{L^2} \right)$$

$$\underset{\text{Young}}{\leq} C \left(\left\| \frac{\hat{f}}{\langle\xi\rangle^s} \right\|_{L^1} \|\hat{g}\|_{L^2} + \|\hat{f}\|_{L^2} \left\| \frac{\hat{g}}{\langle\xi\rangle^s} \right\|_{L^1} \right)$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} C \|\hat{f}\|_{L^2} \|\hat{g}\|_{L^2} \underbrace{\left\| \frac{1}{\langle\xi\rangle^s} \right\|_{L^2}}_{\text{OK car } s > d/2}$$

$$\leq C \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s} \qquad \blacksquare$$

Rq : ① On a un résultat plus général et plus précis :
pour $\underline{\underline{s \geq 0}}$, $\|uv\|_{H^s} \leq C(\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s})$

On retrouve alors le lemme car $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ si $s > d/2$
La preuve se fait traditionnellement par des techniques d'analyse harmonique

② Lemme de Schauder : $G \in C^\infty(\mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N)$ tq
$G(0)=0$. Alors $u \mapsto G(u)$ envoie $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$
pour $s > d/2$, et l'appl. est unif. lipschitzienne sur les bornés de $H^s(\mathbb{R}^d)$: $\forall R > 0$, $\exists\ C_R$ / $\|u\|_{H^s}, \|v\|_{H^s} \leq R$
$\Rightarrow \|G(u) - G(v)\|_{H^s} \leq C_R \|u-v\|_{H^s}$.

③ Lemme de Schauder pour $G = G(x,u)$: ça existe (...)

On s'intéresse à l'éq. (**) $u(t,x) = G(t)u_0(x) + \int_0^t G(t-\tau) F(u(\tau,x))\,d\tau$

Hypothèse 2
On suppose $F(z) = \lambda \bar{z}^a z^b$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a+b \geq 2$ (pb NL)

ex : (NLS) $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda \bar{u}^a u^b$
ondes : $(\partial_t^2 - \Delta) u = \lambda \bar{u}^a u^b = \lambda u^{a+b}$ si $u \in \mathbb{R}$ (raisonnable)

Rq : $F(z) = \lambda |z|^{2\sigma} z$, $\sigma \in \mathbb{N}$: courant pour (NLS) (physique). On y reviendra

Th : Supposons les hypothèses 1 et 2 satisfaites. On suppose en outre que l'hyp. 1 est satisfaite pour $s > d/2$, et tout $T > 0$. Soit $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$.
Alors il existe une unique solution maximale $u \in C([0, T_+[; H^s(\mathbb{R}^d))$ à (**) ($T_+ > 0$). Elle est maximale : si $T_+ < \infty$, alors
$\|u(t)\|_{H^s} \underset{t \to T_+,\ t<T_+}{\longrightarrow} +\infty$.

<u>Lemme</u> : On suppose $\exists\, s > d/2$ tq $\forall T>0,\ \exists\, C_T > 0$ /
$\forall f \in H^s, \quad \sup_{0\leq t\leq T} \| G(t) f \|_{H^s} \leq C_T \|f\|_{H^s}$.

On suppose $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et F comme dans l'hyp. 2
Alors il existe $\tau > 0$ ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^s}$ tq
$(**)$ a une unique solution $u \in C([0,\tau]; H^s(\mathbb{R}^d))$.

Dem : point fixe : $\Phi(u)(t,x) := G(t)u_0(x) + \int_0^t G(t-t')F(u(t',x))\,dt'$

Par hyp. 1, $\Phi(u)(t) \in H^s$ si $u_0, u \in H^s$, et pour $T>0$, $T\leq 1$
$0\leq t\leq 1$:

$$\|\Phi(u)(t)\|_{H^s} \leq C\,\|u_0\|_{H^s} + \left\| \int_0^t G(t-t')F(u(t',x))\,dt' \right\|_{H^s}$$

$$\leq C\,\|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \| G(t-t')F(u(t',x))\|_{H^s}\,dt'$$

$$\leq C\|u_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|F(u(t'))\|_{H^s}\,dt'.$$

Rappel : Si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2$, alors $uv \in H^s$ et $\exists C$ ind. u,v /
$\|uv\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}$
Récurrence sur $a+b$: $\|F(u)\|_{H^s} \leq C\,\|u\|_{H^s}^{a+b}$.

il reste, pour $0\leq t\leq \tau \leq 1$:
$$\|\Phi(u)(t)\|_{H^s} \leq C\|u_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|u(t')\|_{H^s}^{a+b}\,dt'$$

$$\leq \underline{C}\,\|u_0\|_{H^s} + Ct \sup_{0\leq t'\leq t} \|u(t')\|_{H^s}^{a+b}.$$

On veut appliquer le lemme de point fixe dans
$X(\tau) = \{ u \in C([0,\tau], H^s) \ / \ \sup_{0\leq t\leq \tau} \|u(t)\|_{H^s} \leq 2\underline{C}\,\|u_0\|_{H^s} \}$
pour $\tau > 0$ potentiellement très petit.

→ pour tout $\tau>0$, $X(\tau)$ est un espace métrique complet, muni de la norme (normé)

$$\|u\|_{X(\tau)} = \sup_{|t|\leq\tau} \|u(t)\|_{H^s}.$$

→ pour appliquer le lemme, on va montrer :

1) Quitte à choisir $\varepsilon>0$ petit, $\Phi : X(\tau) \to X(\tau)$.
2) Quitte à choisir $\tau>0$ encore plus petit, Φ est une contraction sur $X(\tau)$: $\exists c<1 \,/\, \forall u,v \in X(\tau)$
$\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{X(\tau)} \leq c\,\|u-v\|_{X(\tau)}$.

1) Calcul précédent : $\|\Phi(u)\|_{X(\tau)} \leq \underline{C}\|u_0\|_{H^s} + C\tau \underbrace{\|u\|_{X(\tau)}^{a+b}}_{\leq (2\underline{C}\|u_0\|_{H^s})^{a+b}}$.

$\Rightarrow \exists\ \tau_0>0 \,/\, \forall\, 0<\tau\leq\tau_0,\ \forall u\in X(\tau),\ \Phi(u)\in X(\tau)$.

2) $u,v\in X(\tau)$:

$$\Phi(u)-\Phi(v) = \int_0^t G(t-t')\Big(F(u(t',x)) - F(v(t',x))\Big)\,dt'$$

Par hypothèse, $|F(U)-F(V)| \leq C\left(|U|^{a+b-1}+|V|^{a+b-1}\right)|U-V|$
ex : justifier (Taylor avec reste intégral)

$0\leq t\leq\tau$: $\|\Phi(u(t)) - \Phi(v(t))\|_{H^s} \leq C\int_0^t \|F(u(t')) - F(v(t'))\|_{H^s}dt'$

$$\leq C\int_0^t \left(\|u(t')\|_{H^s}^{a+b-1} + \|v(t')\|_{H^s}^{a+b-1}\right)\|u(t')-v(t')\|_{H^s}$$

$$\leq C\int_0^t 2\left(2\underline{C}\|u_0\|_{H^s}\right)^{a+b-1}\|u(t')-v(t')\|_{H^s}\,dt'$$

$$\leq 2C\left(2\underline{C}\|u_0\|_{H^s}\right)^{a+b-1}\underbrace{t}_{\leq\tau}\ \|u-v\|_{X(\tau)}.$$

Cl : $u, v \in X(\tau)$: $\|\phi(u)-\phi(v)\|_{X(\tau)} \leq \underbrace{\tilde{C}\,\tau}_{<1 \text{ si } 0<\tau\ll 1.} \|u-v\|_{X(\tau)}$

Lemme de point fixe $\Rightarrow$ pour $0<\tau\ll 1$, $\exists!\, u \in C([0,\tau], H^s)$ sol.

Dernier point : τ ne dépend que de $\|u_0\|_{H^s}$ $\to$ examiner les calculs

Déduction du th. : notion de sol. maximale.

$I :=$ Réunion de tous les intervalles ouverts contenant $t=0$ pour lesquels on a une sol. $C_t H^s_x$: $[0,\tau] \subset I$, ouvert connexe
$\Rightarrow$ $I = [0, T_+[$, $T_+ > 0$.

Supp. $T_+ < \infty$. S'il existe $t_n \underset{<}{\to} T_+$ / $\left(\|u(t_n)\|_{H^s}\right)_n$ bornée :

$\forall n$, $\|u(t_n)\|_{H^s} \leq R$

Lemme $\Rightarrow$ $u \in C([t_n, t_n+\tau]; H^s)$, où τ dépend de R, mais pas de n.

n grand : $t_n + \tau > T_+$: contradiction
$\Rightarrow \forall t_n \underset{<}{\to} T_+$, $\left(\|u(t_n)\|_{H^s}\right)_n$ non bornée
ie $\|u(t)\|_{H^s} \underset{t \underset{<}{\to} T_+}{\longrightarrow} \infty$ ∎

Rq :
- ce qu'on utilise vraiment sur F : $|F(u)| \leq C|u|^{a+b}$; $|\nabla F(u)| \leq C|u|^{a+b-1}$.
- autre nonlinéarité F : lemme de Schauder.
- calculs plus précis (estimations de Moser) : obstruction à l'existence globale $=$ $\|u(t)\|_{L^\infty} \underset{t \underset{<}{\to} T_+}{\longrightarrow} \infty$: plus précis car $H^s \subset L^\infty$.

ex : On peut avoir $\|u(t)\|_{H^s} \underset{t \to T_+}{\longrightarrow} \infty$ mais $\|u(t)\|_{L^\infty}$ bornée près $t = T_+$.

$u(t,x) = e^{-|x|^2} e^{i\frac{|x|^2}{t-T_+}}$.

Rq : contrairement au cas linéaire, on n'utilise pas la transformée de Fourier : on ne saurait pas comment faire en général...

Q : comment savoir si $T_+ = +\infty$ ou $T_+ < \infty$?

→ pas de réponse général

Réponse (très) partielle : si on sait que $u \in L^\infty_{loc}([0,+\infty[; H^s(\mathbb{R}^d))$, alors $T_+ = +\infty$.

Dans plusieurs cas, des propriétés de l'équation permettent d'avoir des estimations a priori faisant intervenir des quantités telles que $\|u(t)\|_{L^2}$, $\|\nabla u(t)\|_{L^2}$ ...

ex : équation de la chaleur 1D

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = -\lambda u^{2\sigma+1} \quad ; \quad \lambda > 0, \ \sigma \in \mathbb{N}^*, \ u \in \mathbb{R}$$

Obtention (formelle) d'estimations a priori :

1) $u(\partial_t u - \partial_x^2 u) = \lambda u^{2\sigma+2}$

$$\int_{\mathbb{R}} (u\partial_t u - u\partial_x^2 u)\,dx = -\lambda \int u^{2\sigma+2} dx \leq 0 .$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\partial_t(u^2) + \int (\partial_x u)^2 dx \quad (\text{on suppose } u(t,x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u(t,x)^2 dx + \int (\partial_x u)^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2} \leq 0 \ : \ \|u(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} .$$

2) $\partial_t u(\partial_t u - \partial_x^2 u) = -\lambda u^{2\sigma+1}\partial_t u = \dfrac{-\lambda}{2\sigma+2}\partial_t(u^{2\sigma+2})$

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \partial_t u\, \partial_x^2 u\, dx = \frac{-\lambda}{2\sigma+2}\frac{d}{dt}\int u^{2\sigma+2} dx$$

$$0 \geq -\int (\partial_t u)^2 dx = -\int \partial_t u \, \partial_x^2 u \, dx + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \frac{d}{dt} \int u^{2\sigma+2} dx$$

$$= \int \partial_t \partial_x u \, \partial_x u \, dx + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \frac{d}{dt} \int u^{2\sigma+2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \partial_t (\partial_x u)^2 dx + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \frac{d}{dt} \int u^{2\sigma+2} dx$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int (\partial_x u)^2 dx + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \int u^{2\sigma+2} dx \right].$$

<u>Cl</u> : $t \geq 0$, $\frac{1}{2} \|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \leq \frac{1}{2} \|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \|u_0\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$

On va mq $H^1 \subset L^{2\sigma+2}$ (clair car $H^1 \subset L^\infty \cap L^2 \subset L^{2\sigma+2}$), avec une estimation précise. $1 > d/2$ si $d=1$

<u>Lemme ($d=1$)</u> : pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, et

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2} \, \|u\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x u\|_{L^2}^{1/2}$$

<u>Dem</u> : Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. $|u(x)|^2 = \int_{-\infty}^{x} \partial_x (|u(y)|^2) dy$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{x} \overline{u}(y) \, \partial_x u(y) \, dy$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2 \|u\|_{L^2(]-\infty, x])} \|\partial_x u\|_{L^2(]-\infty, x])}$$

$$\leq 2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \blacksquare$$

On en déduit :

<u>Prop</u> : Soit $2 \leq p \leq \infty$. On a $H^1(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ et $\forall u \in H^1(\mathbb{R})$

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^\delta \|u\|_{L^2}^{1-\delta} \|\partial_x u\|_{L^2}^\delta, \text{ où } \delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Dém : $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int |u(x)|^p dx = \int |u(x)|^{p-2} |u(x)|^2 dx$

$$\leq \int \|u\|_\infty^{p-2} |u(x)|^2 dx = \|u\|_\infty^{p-2} \|u\|_2^2$$

$$\underset{\text{Lemme}}{\leq} 2^{\frac{p-2}{2}} \|u\|_2^{\frac{p-2}{2}} \|\partial_x u\|_2^{\frac{p-2}{2}} \|u\|_2^2$$

$$\|u\|_p \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|u\|_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \|\partial_x u\|_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \quad \blacksquare$$

Retour sur l'exemple : $\lambda > 0$, donc

$$\frac{1}{2}\|\partial_x u(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\|\partial_x u(t)\|_2^2 + \frac{\lambda}{2\sigma+2}\|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\partial_x u_0\|_2^2 + \frac{\lambda}{2\sigma+2}\|u_0\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} \leq C(\|u_0\|_{H^1}).$$

Cor : $\exists C > 0 \;/\; \forall u \in C([0,T_+[, H^1(\mathbb{R}))$, $\forall t \in [0,T_+[$,

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq C .$$

Ainsi, on ne peut pas avoir $T_+ < \infty$ pour la solution maximale (sinon, pour t proche de T_+, $\|u(t)\|_{H^1} \geq C+1$), et la solution u est dans H^1 pour tout temps,
$u \in C([0,+\infty[, H^1)$.

Rq : on obtient même un résultat plus précis, puisque
$u \in C \cap L^\infty([0,+\infty[\,; H^1(\mathbb{R}))$.

Autre exemple : $i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = \lambda |u|^{2\sigma} u$; $u|_{t=0} = u_0$.
$\lambda \in \mathbb{R}$

<u>NB</u> : $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \longrightarrow \mathbb{C}$

<u>Rq</u> : contrairement au cas de la chaleur, le groupe libre ($\lambda = 0$) est défini pour tout temps (éq. réversible), donc on peut adapter l'énoncé du th. en $u \in C(]-T_-, T_+[, H^1(\mathbb{R}))$, $T_\pm > 0$.

2 lois de conservation pour (NLS) :

① (masse) $i\,\bar{u}\,\partial_t u + \frac{1}{2}\bar{u}\,\partial_x^2 u = \lambda |u|^{2\sigma+2}$

$$i\int_{x\in\mathbb{R}} \bar{u}\,\partial_t u + \frac{1}{2}\int \bar{u}\,\partial_x^2 u\,dx = \lambda\int |u(t,x)|^{2\sigma+2}dx$$

$$i\int \bar{u}\,\partial_t u\,dx \underbrace{-\frac{1}{2}\int \partial_x\bar{u}\,\partial_x u\,dx}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\lambda\int |u|^{2\sigma+2}dx}_{\in\mathbb{R}}$$

Prenons la partie imaginaire :

$$\operatorname{Im} i\int \bar{u}\,\partial_t u\,dx = 0$$

$$\operatorname{Re}\int \bar{u}\,\partial_t u = \frac{1}{2}\int(\bar{u}\,\partial_t u + u\,\partial_t\bar{u})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \partial_t(\bar{u}u)\,dx = \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2$$

Ainsi, $\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2 \quad \forall t \in]-T_-, T_+[$.

② (énergie) $i\,\partial_t\bar{u}\,\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_t\bar{u}\,\partial_x^2 u = \lambda |u|^{2\sigma} u\,\partial_t\bar{u}$

On intègre en x, et cette fois-ci, on prend la partie réelle :

$$0 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\underbrace{\int \partial_t\bar{u}\,\partial_x^2 u}_{-\int \partial_t\partial_x\bar{u}\,\partial_x u} = \lambda \operatorname{Re}\int |u|^{2\sigma} u\,\partial_t\bar{u}$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int \partial_t\partial_x\bar{u}\,\partial_x u = \lambda\,\mathrm{Re}\int |u|^{2\sigma} u\,\partial_t\bar{u}$$

$$-\frac{1}{4}\int \partial_t\left(|\partial_x u(t,x)|^2\right)dx = \lambda\int |u|^{2\sigma}\underbrace{\mathrm{Re}\, u\,\partial_t\bar{u}}_{\frac{1}{2}\partial_t(|u(t,x)|^2)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\partial_x u(t,x)|^2 dx + \lambda\int \underbrace{|u|^{2\sigma}\partial_t|u|^2}_{\frac{1}{\sigma+1}\partial_t\left[(|u|^2)^{\sigma+1}\right]}dx = 0$$

Notons $E(t) = \frac{1}{2}\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$

On a $E(t) = E(0)$, $\forall t\in]-T_-,T_+[$.

$\longrightarrow$ comme pour la chaleur, on a une estimation a priori pour $\lambda>0$: $\exists C$ / $\|u(t)\|_{H^1}\leq C$.

$\Rightarrow T_- = T_+ = +\infty$.

$\longrightarrow$ on a la même conclusion si $\lambda<0$ et σ pas trop grand.

Lemme : Supposons $\lambda<0$ et $\sigma<2$. On a l'estimation a priori suivante. Pour tout $u_0\in H^1(\mathbb{R})$, tout $u\in C(]-T_-,T_+[;H^1)$ sol. (NLS), il existe $C>0$ ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^1}$ tq $\forall t\in]-T_-,T_+[$, $\|u(t)\|_{H^1}\leq C$.

Dem : on sait déjà $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$

Energie :

$$\frac{1}{2}\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2 = E(t) - \frac{\lambda}{2\sigma+2}\|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$$

E(0) bien définie car $u_0\in H^1$

$$= E(0) + \frac{|\lambda|}{2\sigma+2}\|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$$

$$\leq C(\|u_0\|_{H^1}) + C\left(\|u(t)\|_{L^2}^{1-\delta}\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^{\delta}\right)^{2\sigma+2}$$

$$\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma+2} = \frac{\sigma}{2\sigma+2}$$

$$\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2 \leq C(\|u_0\|_{H^1}) + C\,\|u(t)\|_{L^2}^{\sigma+2}\,\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^{\sigma}$$
$$\leq C(\|u_0\|_{H^1}) + C\,\|u_0\|_{L^2}^{\sigma+2}\,\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^{\sigma}.$$

<u>Cl</u> : $\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2 \leq a + b\,\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^{\sigma}$, où a et b ne dépendent que de $(\lambda, \sigma \not{t})$ $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$.

Supposons $\exists\, t_n$ / $\|\partial_x u(t_n)\|_{L^2} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Dans ce cas, le MG va à l'infini plus vite que le MD : impossible

$$\underbrace{\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^{2-\sigma}}_{\to +\infty} \leq \underbrace{\frac{a}{\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^{\sigma}}}_{\to 0} + b$$

$\Rightarrow \exists\, C = C(a,b)$ / $\|\partial_x u(t)\|_{L^2} \leq C \quad \forall t \in]-T_-, T_+[$

On conclut comme avant : $T_- = T_+ = +\infty$.

<u>Rq</u> : on a supposé $\sigma \in \mathbb{N}$ pour construire la sol. u
Schauder mq il suffit de supposer $\sigma > 0$.

<u>Q</u> : la valeur $\sigma = 2$ joue-t-elle un rôle particulier dans le cas $\lambda < 0$?

<u>Prop</u> : La solution de $i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = -|u|^4 u$

$$u(0,x) = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{ch(2x\sqrt{2})}}\, e^{-i\frac{x^2}{2}} =: Q(x)\, e^{-i\frac{x^2}{2}}$$

est donnée par :

$$u(t,x) = \frac{1}{(1-t)^{1/2}}\, Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}} ; \; t < 1.$$

<u>Dem</u> (exercice avec indications) :

• Q est sol. de l'EDO $\quad -\frac{1}{2}Q''+Q=Q^5 \quad (E)$

$Q(x)=\dfrac{3^{1/4}}{\sqrt{ch(2x\sqrt{2})}}$. On cherche une sol. de (E) sous la forme $Q(x)=\dfrac{\alpha}{(ch(\beta x))^{\gamma}}$

$$Q'(x)=\alpha\,(-\gamma\beta)\,\frac{sh(\beta x)}{(ch(\beta x))^{\gamma+1}}$$

$$Q''(x)=\alpha(\gamma\beta)(\gamma+1)\beta\,\frac{sh^2(\beta x)}{ch(\beta x)^{\gamma+2}}-\alpha\gamma\beta^2\frac{ch(\beta x)}{ch(\beta x)^{\gamma+1}}$$

$$-\frac{1}{2}Q''+Q=\frac{\alpha}{(ch(\beta x))^{\gamma+2}}\left[-\frac{\beta^2}{2}\gamma(\gamma+1)\,sh^2(\beta x)+\frac{\gamma\beta^2}{2}ch^2(\beta x)+ch^2(\beta x)\right]$$

$$=\frac{\alpha}{(ch(\beta x))^{\gamma+2}}\left[-\frac{\beta^2}{2}\gamma(\gamma+1)ch^2(\beta x)+\frac{\beta^2}{2}\gamma(\gamma+1)+\left(\frac{\gamma\beta^2}{2}+1\right)ch^2\beta x\right]$$

$$\overset{?}{=}\frac{\alpha^5}{(ch(\beta x))^{5\gamma}}$$

$\Rightarrow$ on résout : 1) $-\frac{\beta^2}{2}\gamma(\gamma+1)+\frac{\gamma\beta^2}{2}+1=0$ (forcément !)

2) $\frac{\beta^2}{2}\gamma(\gamma+1)=\alpha^4$

3) $4\gamma=2$

3) $\Rightarrow \gamma=1/2$

1) : $-\frac{\beta^2}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{\beta^2}{4}+1=0 \iff 1=\frac{\beta^2}{8} \iff \beta^2=8$, $\beta=2\sqrt{2}$ ($\beta=-2\sqrt{2}$ ne change pas Q)

2) : $4 \times \frac{3}{4} = \alpha^4$; $\alpha = 3^{1/4}$

La solution de $i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = -|u|^4 u$; $u(0,x) = Q(x) e^{-i\frac{x^2}{2}}$

est donnée par $u(t,x) = (\dots)$ si $-\frac{1}{2}Q'' + Q = Q^5$:

$$= \frac{1}{(1-t)^{1/2}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}}$$

$$i\partial_t u = \cancel{\frac{i}{2}\frac{1}{1-t}u} + i\frac{x}{(1-t)^2}\cancel{\frac{1}{(1-t)^{1/2}}Q'\left(\frac{x}{1-t}\right)e^{i(\dots)}}$$
$$+ iu e^{-i(\dots)} \underbrace{\partial_t\left(e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}}\right)}_{\left(\frac{2i}{2(1-t)} + \frac{i(2t-\cancel{x^2})}{2(1-t)^2}\right)e^{i(\dots)}}$$

$$\partial_x u = \frac{1}{(1-t)^{3/2}} Q'\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}} - \frac{2ix}{2(1-t)}\frac{1}{(1-t)^{1/2}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)}$$

$$\partial_x^2 u = \frac{1}{(1-t)^{5/2}} Q''\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)} - \cancel{\frac{2ix}{(1-t)^{5/2}} Q'\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)}}$$
$$\underbrace{- \cancel{\frac{i}{(1-t)^{3/2}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right)} e^{i(\dots)}}_{-\frac{i}{1-t}u} - \cancel{\frac{x^2}{(1-t)^{5/2}} Q(\dots) e^{i(\dots)}}$$

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = -u \underbrace{\left(\frac{1}{1-t} + \frac{t}{(1-t)^2}\right)}_{\frac{1}{(1-t)^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^{5/2}} Q''(\dots) e^{i(\dots)}$$

$$= \frac{-1}{(1-t)^{5/2}} e^{i(\dots)} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}Q''\left(\frac{x}{1-t}\right) + Q\left(\frac{x}{1-t}\right)\right)}_{= Q^5\left(\frac{x}{1-t}\right)} = -|u|^4 u \blacksquare$$

Cl : dans le cas $\sigma = 2$, $\lambda = -1$, on a $T_- = +\infty$, mais $T_+ = 1$ (pour ce choix de u_0).

↳ en fait, on peut avoir $T_- = +\infty$ et $T_+ > 0$ quelconque en jouant avec u_0.

On a utilisé de façon fine l'injection $H^1(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, avec une inégalité. C'est plus général. On voudra p.ex. $H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$

⇝ Quels p ?

3) Injections de Sobolev

Lemme : Soit $m \geq 2$, et pour $1 \leq j \leq m$, $p_j \in [1, \infty]$, avec $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} = 1$.

Alors $\forall\, u_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d), \dots, u_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int |u_1 \dots u_m| dx \leq \|u_1\|_{L^{p_1}} \dots \|u_m\|_{L^{p_m}}.$$

Dem : $m = 2$: Hölder.

$$\int |u_1 \dots u_{m+1}| dx \leq \|u_1 \dots u_m\|_{L^{p'_{m+1}}} \|u_{m+1}\|_{L^{p_{m+1}}}$$

or $\frac{1}{p'_{m+1}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j}$ donc $1 = \sum_{j=1}^{m} \frac{p'_{m+1}}{p_j}$: $\tilde{p}_j = \frac{p_j}{p'_{m+1}} \in [1, \infty]$

$$\|u_1 \dots u_m\|_{L^{p'_{m+1}}}^{p'_{m+1}} = \int |u_1|^{p'_{m+1}} \dots |u_m|^{p'_{m+1}} dx$$

$$\leq \underbrace{\| |u_1|^{p'_{m+1}} \|_{L^{\tilde{p}_1}}} \dots \| |u_m|^{p'_{m+1}} \|_{L^{\tilde{p}_m}}$$

$$\left(\int |u_j|^{p'_{m+1} \tilde{p}_j} \right)^{1/\tilde{p}_j} = \left(\int |u_j|^{p_j} \right)^{p'_{m+1}/p_j} = \|u_j\|_{L^{p_j}}^{p'_{m+1}}$$

Cl : $(H_m) \Rightarrow (H_{m+1})$

Prop : $d \geq 2$. Soit $1 \leq p < d$. Il existe $C > 0$ / $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^p} .$$

Dem : $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a, pour tout $1 \leq j \leq d$,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_j} \partial_j u(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_d) \, dy_j$$

Donc $|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_j u(x_1, \dots y_j, \dots, x_d)| \, dy_j =: I_j(x_1, \dots x_{j-1}, x_{j+1} \dots x_d)$

$$|u(x)|^d \leq \prod_{j=1}^{d} I_j$$

$$|u(x)|^{d/d-1} \leq \left(\prod_{j=1}^{d} I_j \right)^{1/d-1}$$

On intègre en x_1 : on intègre $d-1$ termes à droite
⇝ lemme avec $p_1 = \dots = p_{d-1} = d-1$, $u_j = |I_j|^{1/d-1}$.

$$\int |u(x)|^{d/d-1} dx_1 \leq I_1(x_2, \dots, x_d)^{1/d-1} \left(\prod_{j=2}^{d} |I_j|_{L^1_{x_1}} \right)^{1/d-1}$$

et ainsi de suite avec $x_2, \dots, x_d$:

$$\int |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq |\partial_1 u|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1/d-1} \cdots |\partial_d u|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1/d-1} \leq |\nabla u|_{L^1}^{d/d-1}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} \leq \|\nabla u\|_{L^1} \quad : \text{prop. pour } p = 1.$$

$1 \leq p < n$: $v = |u|^\gamma$, $\gamma > 1$

$$\underbrace{\|v\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}}_{= \, \|u\|^\gamma_{L^{\frac{d\gamma}{d-1}}}} \lesssim \|\nabla v\|_{L^1} = \gamma \| |u|^{\gamma-2} u \nabla u \|_{L^1} \leq \gamma \underbrace{\| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{p'}}}_{\|u\|^{\gamma-1}_{L^{p'(\gamma-1)}}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\|u\|^{\gamma}_{L^{\frac{d\gamma}{d-1}}} \leq C \|u\|^{\gamma-1}_{L^{p'(\gamma-1)}} \|\nabla u\|_{L^p} .$$

On veut simplifier : $\frac{d\gamma}{d-1} = p'(\gamma-1)$: $\gamma\left(p' - \frac{d}{d-1}\right) = p'$

Comme $1 \leq p < d$, $\frac{1}{p} > \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{p'} < 1 - \frac{1}{d} = \frac{d-1}{d}$, ie $p' > \frac{d}{d-1}$

$$\gamma = \frac{p'}{p' - \frac{d}{d-1}} > 1 \text{ : ok.}$$

$$\|u\|_{L^{\frac{d\gamma}{d-1}}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\frac{d\gamma}{d-1} = \frac{d}{d-1} \frac{p'}{p' - \frac{d}{d-1}} \qquad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right)$$

$$= \frac{d}{d-1} \frac{p}{p - \frac{d}{d-1}(p-1)} = \frac{d}{d-1} \frac{p(d-1)}{p(d-1) - d(p-1)} = \frac{dp}{d-p} \quad \blacksquare$$

<u>Corollaire</u> : $d \geq 3$: $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$. Il existe $C>0$ / $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^d)$,
$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|^{1-\delta}_{L^2} \|\nabla u\|^{\delta}_{L^2}$, $\quad \delta = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$.

<u>Dem</u> : $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2} =: 2^*$: on peut donc trouver $\theta \in [0,1]$ /

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{2^*}$$

$$\|u\|_{L^p} = \| |u|^{1-\theta} |u|^{\theta} \|_{L^p} \leq \| |u|^{1-\theta} \|_{L^{\frac{2}{1-\theta}}} \| |u|^{\theta} \|_{L^{2^*/\theta}}$$

$$\leq \|u\|^{1-\theta}_{L^2} \|u\|^{\theta}_{L^{2^*}}$$

$$\underset{\text{Prop.}}{\leq} C \|u\|^{1-\theta}_{L^2} \|\nabla u\|^{\theta}_{L^2}$$

Maintenant, calculons θ : $\frac{1}{2^*} = \frac{d-2}{2d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{d} \quad : \quad \theta = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) = \delta \quad \blacksquare$$

<u>Rq</u> : on a déjà vu que le corollaire est vrai aussi pour $d = 1$.
$\rightarrow$ il est en fait vrai pour tout d :

<u>Corollaire</u> : $d = 2$, $2 \leq p < \infty$. Il existe $C > 0$ / $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\delta} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\delta} \quad ; \; \delta = 1 - \frac{2}{p}.$$

<u>Dem</u> : on part à nouveau de la proposition : si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

On montre par récurrence :

$$(H_j) \quad \|u\|_{L^{2j}}^j \leq C_j \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^{j-1}.$$

$j = 1$: débile.

$$j \geq 2 : \quad \|u\|_{L^{2j}}^j = \| |u|^j \|_{L^2} \leq C \|\nabla(|u|^j)\|_{L^1} \leq C_j \| |u|^{j-1} |\nabla u| \|_{L^1}$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} C_j \| |u|^{j-1} \|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$\leq C_j \|u\|_{L^{2j-2}}^{j-1} \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$\underset{(H_{j-1})}{\leq} \tilde{C}_j \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^{j-1} \|\nabla u\|_{L^2}$$

Ainsi, $(H_j) \Rightarrow (H_{j+1})$.

On a donc montré le corollaire pour tout p de la forme $p = 2j$, $j \in \mathbb{N}$.

Soit maintenant $p \in [2, \infty[$ (pas forcément un entier pair).
Il existe $j \in \mathbb{N}$ / $2j \leq p < 2j+2$ $\left(j = \left[\frac{p}{2}\right]\right)$.

$$\Rightarrow \exists \theta \in]0,1] \,/\, \frac{1}{p} = \frac{\theta}{2j} + \frac{1-\theta}{2j+2}.$$

Hölder :
$$\|u\|_{L^p} = \| \,|u|^\theta \,|u|^{1-\theta} \|_{L^p}$$
$$\leq \|u\|_{L^{2j}}^{\theta} \, \|u\|_{L^{2j+2}}^{1-\theta}$$
$$\lesssim \left(\|u\|_{L^2}^{1/j} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{j-1}{j}} \right)^{\theta} \left(\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{j+1}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{j}{j+1}} \right)^{1-\theta}$$
$$\lesssim \underbrace{\|u\|_{L^2}^{\frac{\theta}{j} + \frac{1-\theta}{j+1}}}_{\|u\|_{L^2}^{2/p}} \, \|\nabla u\|_{L^2}^{\theta \frac{j-1}{j} + (1-\theta)\frac{j}{j+1}}$$

On remarque ensuite $\frac{\theta}{j} + \frac{1-\theta}{j+1} + \theta \frac{j-1}{j} + (1-\theta)\frac{j}{j+1} = 1$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^p} \lesssim \|u\|_{L^2}^{2/p} \, \|\nabla u\|_{L^2}^{1-2/p} \qquad \blacksquare$$

<u>Rq</u> : on n'a pas $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Plus généralement, on n'a pas $H^{d/2}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(s > d/2)$.
$d=2$: soit $f \in L^2$, $f \geq 0$, avec $\langle \xi \rangle^{-1} f \notin L^1(\mathbb{R}^2)$

$$f(\xi) = \frac{1}{\langle \xi \rangle \ln(|\xi|^2 + 2)}$$

$\rightarrow$ $f \geq 0$: ok
$\rightarrow$ $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$: $f(\xi) = g(|\xi|)$, $g(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{1/2} \ln(2+r^2)}$

$$g(r) \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2r\ln r} \quad ; \quad f \in C(\mathbb{R}^2) : \text{pb d'intégrabilité} = r \to +\infty$$

$$\int_{R_0}^{R} |g(r)|^2 r\,dr \sim \frac{1}{4}\int_{R_0}^{R} \underbrace{\frac{r\,dr}{r^2(\ln r)^2}}$$

$\underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$

$$\frac{1}{r(\ln r)^2} = \frac{u'}{u^2}, \quad u(r) = \ln r$$

$$\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\langle\xi\rangle^{-1} f \notin L^1 : \frac{r}{r+1} g(r) \underset{r\infty}{\sim} \frac{1}{2r\ln r} : \frac{u'}{u}, \ u(r) = \ln r$$

$$\int^{\infty} \ln(u(r))' dr = \infty \Rightarrow \langle\xi\rangle^{-1} f \notin L^1(\mathbb{R}^2)$$

Soit $u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\langle\xi\rangle^{-1} f\right)$

$\to$ comme $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$: $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

$\to$ formellement, $u(0) = \int \hat{u}(\xi)\,d\xi = \int \langle\xi\rangle^{-1} f(\xi)\,d\xi = +\infty$.

$\to$ retour de la rigueur : si on avait $u \in L^\infty$, alors

$$\left|\int u(x)\, n^2 e^{-\frac{n^2|x|^2}{2}} dx\right| \leq \|u\|_\infty \underbrace{\|n^2 e^{-\frac{n^2|x|^2}{2}}\|_{L^1}}_{\|e^{-|x|^2/2}\|_{L^1}}.$$

or $\displaystyle\int u(x) \underbrace{n^2 e^{-\frac{n^2|x|^2}{2}}}_{\psi_n(x)} dx = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}^{-1}\psi_n \rangle$

$$= \int \langle\xi\rangle^{-1} f(\xi)\, e^{-\frac{|\xi|^2}{2n^2}} d\xi$$

convergence croissante ($f \geq 0$) : $\xrightarrow[n\infty]{} \displaystyle\int \langle\xi\rangle^{-1} f(\xi)\,d\xi = +\infty$ ∎

4) Application : équation de Schrödinger non linéaire

$$\text{(NLS)} \quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \ x \in \mathbb{R}^d, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0.$$

On procède comme dans le cas $d=1$ pour avoir des conservations :

(NLS) $\times \bar{u}$ et $\operatorname{Im}\int$: $\qquad \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int |u(t,x)|^2 dx = 0.$

(NLS) $\cdot \partial_t \bar{u}$ et $\operatorname{Re}\int$: $\qquad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int |\nabla u(t,x)|^2 dx + \dfrac{\lambda}{\sigma+1}\displaystyle\int |u(t,x)|^{2\sigma+2} dx\right) = 0.$

Rq : • en général, on ne connaît pas de loi de conservation faisant intervenir des normes de Sobolev d'indice supérieur (typiquement, H^2 ou H^3).
• seule exception connue : $\sigma = d = 1$.

$$M = \int |u(t,x)|^2 dx = \|u(t)\|_{L^2}^2$$

$$E = \frac{1}{2}\int |\nabla u(t,x)|^2 dx + \frac{\lambda}{\sigma+1}\int |u(t,x)|^{2\sigma+2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}.$$

Quelles estimations a priori ?

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = E - \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$$

→ si $\lambda \geq 0$: $\exists C > 0 \,/\, \|u(t)\|_{H^1} \leq C$ (tant que...)
→ si $\lambda < 0$ et $\sigma \leq \dfrac{2}{d-2}$ (si $d \geq 3$), alors

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq C + C\left(\|u\|_{L^2}^{1-\delta}\|\nabla u\|_{L^2}^{\delta}\right)^{2\sigma+2} \qquad \delta = d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sigma+2}\right) = \frac{d\sigma}{2\sigma+2}$$

$$\leq C + C\,\|u(t)\|_{L^2}^{2\sigma+2-d\sigma}\,\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{d\sigma}$$

$$\leq C + C\,\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{d\sigma}$$

→ si $\sigma < 2/d$: $\exists C \,/\, \|u(t)\|_{H^1} \leq C$

→ si $\sigma = \frac{2}{d}$: $\exists R \,/$ si $\|u\|_{L^2} < R$, alors $\|u(t)\|_{H^1} \leq C$.

<u>Rq</u> : $d = 1$. On a $R = \|Q\|_{L^2}$: résultat optimal.

→ si $\sigma > 2/d$: on ne peut rien dire.

<u>Ccl</u> : on voudrait une théorie H^1 pour le problème de Cauchy.
On a supposé jusqu'à présent $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2$.
⇒ besoin d'une autre approche si $d \geq 2$.