VI Solutions de problèmes d'évolution par analyse de Fourier

Equation de Schrödinger $\quad i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Pb d'évolution de type Cauchy : $u|_{t=0} = u_0$.

Mécanique quantique : $|u(t,x)|^2 dx$ = probabilité

Vérifions (formellement pour l'instant) que ceci est raisonnable : sup. $\int |u_0|^2 = 1$, et mq $\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Technique : on multiplie l'éq. par $\bar{u}$ (...).
on suppose ici qu'on peut faire les IPP etc.

Méca. Q : $P(\text{particule se trouve dans } E \text{ à l'instant } t) = \int_E |u(t,x)|^2 dx$

.. $P(\text{moment se trouve dans } E \text{ à l'instant } t) = \int_E |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi$.

où E ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$.

Heisenberg : « On ne peut déterminer précisément la position et le moment simultanément. »

Position : $\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^d} x |u|^2 dx$; Moment : $\bar{\xi} = \int_{\mathbb{R}^d} \xi |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi$

Dispersion : $(\delta x_j)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - \bar{x}_j)^2 |u(t,x)|^2 dx$

$$(\delta \xi_j)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (\xi_j - \bar{\xi}_j)^2 |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi.$$

Lemme $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\|x_j \varphi\|_{L^2} \|\xi_j \hat{\varphi}\|_{L^2} \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2$, $1 \leq j \leq d$.

$\rightarrow$ on ne peut localiser à la fois φ et $\hat{\varphi}$ (près de 0).

Dem : soit $Q = \int x_j \bar{\varphi} \, \partial_j \varphi \, dx$

1) Cauchy-Schwarz : $|Q| \leq \|x_j \varphi\|_{L^2} \|\partial_j \varphi\|_{L^2}$

Plancherel : $\|\partial_j \varphi\|_{L^2} = \|\xi_j \hat{\varphi}\|_{L^2}$

2) IPP sur $\mathrm{Re}\, Q$: $\mathrm{Re} \int x_j \bar{\varphi} \, \partial_j \varphi \, dx = \int x_j \, \mathrm{Re}(\bar{\varphi} \partial_j \varphi) dx$
$= \frac{1}{2} \int x_j \, \partial_j |\varphi|^2 dx = -\frac{1}{2} \int |\varphi|^2 dx$

3) $\|x_j \varphi\|_{L^2} \|\xi_j \hat{\varphi}\|_{L^2} \geq |Q| \geq |\mathrm{Re}\, Q| \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2$ ∎

Proposition (Principe d'incertitude de Heisenberg)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\delta x_j)^2 (\delta \xi_j)^2 \geq \frac{1}{4}$

Dem : soit $v(t,x) = e^{-i \bar{\xi}(t) \cdot x} u(t, x + \bar{x}(t))$

. $\int x |v(t,x)|^2 dx = \int x |u(t, x + \bar{x})|^2 dx$
$= \int (y - \bar{x}) |u(t,y)|^2 dy = \bar{x} - \bar{x} = 0$

. $\int \xi |\hat{v}(t,\xi)|^2 d\xi = \int \xi |\hat{v}(t, \xi + \bar{\xi})|^2 d\xi = 0$.

. Lemme : $(\delta x_j(v))^2 (\delta \xi_j(v))^2 \geq \frac{1}{4} \|v(t)\|_{L^2}^4 = \frac{1}{4}$ car $\int |u|^2 = 1$.

. mq $\delta x_j(u)^2 = \delta x_j(v)^2$ et $\delta \xi_j(u)^2 = \delta \xi_j(v)^2$.
(exo)

∎

Résolution de l'éq. de Schrödinger : $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0$; $u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Supp. pour $t \neq 0$, $u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: on prend la transf. de Fourier (en x)

$$i\partial_t \hat{u} - \frac{1}{2}|\xi|^2 \hat{u} = 0 \quad ; \quad \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0$$

EDO d'ordre 1 en t : $\hat{u}(t,\xi) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$ (ξ = paramètre)

Rappel : $\mathcal{F}$ bijection $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$; $\xi \mapsto e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) \in \mathcal{S}$ (exo)

Cl : <u>Prop</u> : si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\exists ! \, u \in C(\mathbb{R};\mathcal{S})$ sol. Schrödinger.

$$u(t,x) = \mathcal{F}^*\left(e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)\right).$$

On note $u(t,x) = e^{i\frac{t}{2}\Delta}u_0(x)$.

<u>ex</u> : évolution des gaussiennes,

$$g_a(x) = e^{-a|x|^2/2}, \quad a > 0, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

$$e^{i\frac{t}{2}\Delta} g_a(x) = \frac{1}{(1+iat)^{d/2}} e^{-\frac{a}{1+iat}\frac{|x|^2}{2}}.$$

Détails du calcul : $\hat{g}_a(\xi) = \frac{1}{a^{d/2}} e^{-|\xi|^2/(2a)}$ (*)

$$e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}\hat{g}_a(\xi) = \frac{1}{a^{d/2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}\left(\frac{1}{a}+it\right)} = \frac{1}{a^{d/2}} e^{-\frac{1+iat}{a}\frac{|\xi|^2}{2}}$$

Pour finir : FIF, et (*) encore vraie par prolongement analytique, si $a \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, a > 0$.

<u>Rq</u> : du coup, on peut garder le calcul dans le cas plus général où, dès le début, $a \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, a > 0$.

Rq : $|\hat{u}(t,\xi)|^2 = |\hat{u}_0(\xi)|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

→ Plancherel : $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u(t,.)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

si $\|u_0\|_{L^2} = 1$ (probabilité), alors $\|u(t,.)\|_{L^2} = 1 \ \forall t$
=> on garde une mesure de proba.

→ plus fort : la densité de probabilité du moment est conservée.

Propriété . comme $e^{i\frac{t}{2}\Delta} = \mathcal{F}^{-1} e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \mathcal{F}$,
on vérifie : $e^{i\frac{t}{2}\Delta}(\partial_x^\alpha u_0) = \partial_x^\alpha (e^{i\frac{t}{2}\Delta} u_0)$.

Solutions généralisées de l'équation de Schrödinger

On change les hypothèses sur la donnée initiale :

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \quad ; \quad u_{|t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d), \text{ espace de Sobolev.}$$

Idée = . $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$: on approche u_0 par des fonctions de $\mathcal{S}$, et on examine $u(t,x)$.
. ça peut raisonnablement marcher car $e^{i\frac{t}{2}\Delta}$ est linéaire.
. ça marche effectivement car $e^{i\frac{t}{2}\Delta}$ est unitaire sur $H^s(\mathbb{R}^d)$, $\forall s$.

Prop : pour tout $s \in \mathbb{R}$, tout $t \in \mathbb{R}$, toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
$\|U_0(t) f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}$, où on a noté $U_0(t) = e^{i\frac{t}{2}\Delta}$

Dem : $\|U_0(t) f\|_{H^s} = \|e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \langle\xi\rangle^s \hat{f}\|_{L^2} = \|\langle\xi\rangle^s \hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{H^s}$.

Cor.: $\forall s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $U_0(t)$ admet un unique prolongement en un opérateur unitaire sur $H^s(\mathbb{R}^d)$. Ce prolongement (encore noté $U_0(t)$) vérifie $\mathcal{F}(U_0(t) f) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{f}$, $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^d)$

Dem: . unique prolongement en une isométrie : immédiat.

. $U_0(t_1 + t_2) = U_0(t_1) U_0(t_2)$: identité vraie sur $\mathcal{S}$

Or chacun des deux membres est continu et $\mathcal{S}$ est dense dans H^s, donc $U_0(t)^{-1} = U_0(-t)$: $U_0(t)$ est unitaire.

. $\mathcal{F}(U_0(t) f) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{f}$ sur $\mathcal{S}$, et $U_0(t)$ borné sur H^s, ainsi que $\mathcal{F}^{-1} e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \mathcal{F}$: les opérateurs coïncident donc sur H^s.

Notation : $H^{-\infty} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s$; $H^{+\infty} = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s$.

Def : $u_0 \in H^{-\infty}$; la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow H^{-\infty}$, définie par

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi),$$

est la solution généralisée de l'éq. de Schrödinger avec donnée initiale u_0.

ex: $u_0 = \delta$ (rappel : $\delta \in H^s(\mathbb{R}^d) \iff s < -d/2$)

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{\delta} = (2\pi)^{-d/2} \underbrace{e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}}_{\mathcal{F}(\ ) = ?}.$$

Rappel : $g_a(x) = e^{-a|x|^2/2}$ est tq $\hat{g}_a(\xi) = a^{-d/2} e^{-|\xi|^2/(2a)}$ si $a > 0$

en particulier, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle g_a, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{g}_a, \psi \rangle = a^{-d/2} \int e^{-|x|^2/(2a)} \psi(x) dx$$

$\rightarrow$ fonctions holomorphes pour $\mathrm{Re}\, a > 0$, continues sur $\{\mathrm{Re}\, a \geq 0, a \neq 0\}$, coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\rightarrow$ prolongement analytique : coïncident sur $\{\mathrm{Re}\, a > 0\}$

$\rightarrow$ continuité : coïncident sur $\{\mathrm{Re}\, a \geq 0, a \neq 0\}$.

Ccl : dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{g_a}(\xi) = a^{-d/2} e^{-|\xi|^2/(2a)}$ dès que $\mathrm{Re}\, a \geqslant 0$ et $a \neq 0$.

$a = it$ dans le cas présent : $(it)^{-d/2}$

La formule donne : $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\Big((2\pi)^{-d/2} \underbrace{e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}}_{\text{fct paire de } \xi}\Big)$

$$u(t,x) = (2\pi)^{-d/2} \mathcal{F}\left(e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}\right)$$

$$= (2\pi)^{-d/2} (it)^{-d/2} e^{-|x|^2/(2it)} = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} e^{i|x|^2/(2t)}.$$

NB : $t > 0$: $\dfrac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} = \dfrac{1}{(2\pi t)^{d/2}} i^{-d/2} = \dfrac{e^{-id\pi/4}}{(2\pi t)^{d/2}}$

$t < 0$: $\dfrac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} = \dfrac{1}{(2\pi(-i)|t|)^{d/2}} = \dfrac{1}{(2\pi|t|)^{d/2}}(-i)^{-d/2} = \dfrac{e^{+id\pi/4}}{(2\pi|t|)^{d/2}}$.

Rq : $u_0 = u_0 * \delta$

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{u}_0 = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{u}_0 \hat{\delta}$$
$$= \hat{u}_0 e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{\delta} = \mathcal{F}(u_0 * U_0(t)\delta)$$
$$= \mathcal{F}\left(u_0 * \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} e^{i|x|^2/(2t)}\right)$$

On inverse $\mathcal{F}$: $u(t,x) = U_0(t)u_0(x) = \dfrac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} \displaystyle\int e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}} u_0(y)\,dy$.

Formule « vraie » si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

NB : . en général, on n'a pas de formule plus explicite. Exception importante = gaussienne.

. c'est en fait déjà assez miraculeux qu'on ait une formule aussi explicite.

Questions de régularité

Prop : si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors u, sol. généralisée de l'éq. de Schrödinger avec donnée initiale u_0, est tq $u \in C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d))$.

Dem : rappel : 1) si $u_0 \in \mathcal{S}$, alors $u \in C(\mathbb{R}; \mathcal{S})$
2) $U_0(t)$ unitaire H^s.

$u_0 \in H^s$ approché par $u_{0j} \in \mathcal{S}$: $u_{0j} \xrightarrow[j\infty]{} u_0$ dans H^s.

$\|u_j(t) - u_\ell(t)\|_{H^s} = \|u_{0j} - u_{0\ell}\|_{H^s}$ $\forall t$, car $u_j - u_\ell = U_0(t)u_{0j} - U_0(t)u_{0\ell}$
$= U_0(t)(u_{0j} - u_{0\ell})$.
(éq. linéaire)

Ainsi, $\forall T>0$, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $C([-T,T]; H^s)$:
$u_j \longrightarrow v$ dans $C([-T,T]; H^s)$.
Or $u(t) = \lim_{j\infty} u_j(t)$ dans H^s (t fixé), donc $u = v$ ▪

On a vu que $\partial_x^\alpha(U_0(t)f) = U_0(t)(\partial_x^\alpha f)$: la régularité en espace est propagée. Régularité en temps ?

$$\text{Eq :} \quad i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u \Rightarrow 1 \text{ dérivée en } t \simeq 2 \text{ dérivées en } x.$$

Prop : $u_0 \in H^s$, et u sol. généralisée associée. Pour tout $j \in \mathbb{N}$,
$u \in C^j(\mathbb{R}; H^{s-2j}(\mathbb{R}^d))$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\|\partial_t^j u(t)\|_{H^{s-2j}} \leq \frac{1}{2^j}\|u_0\|_{H^s}.$$

Dem : $\cdot$ $u_0 \in \mathcal{S}$: on montre par récurrence $\|\partial_t^j u(t)\|_{H^{s-2j}} = \left\|\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^j u(t)\right\|_{H^{s-2j}}$
$\leq \frac{1}{2^j}\|u(t)\|_{H^s} = \frac{1}{2^j}\|u_0\|_{H^s}$

$\cdot$ argument de densité comme ci-dessus, dans $\bigcap_{j=1}^{\infty} C^j([-T,T], H^{s-2j})$.

Cor : sous les mêmes hypothèses,

1) $\partial_t^j \partial_x^\alpha u \in C(\mathbb{R}; H^{s-|\alpha|-2j}(\mathbb{R}^d))$.

2) si $s - 2k > d/2$, alors $u \in C^k(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d)$

⚠ $u_0 \in H^s$ fixé, $t \mapsto U_0(t)u_0$ est continue $\mathbb{R} \to H^s(\mathbb{R}^d)$.
Il n'y a pas d'uniformité en u_0 : on n'a pas
$$\|U_0(t+h) - U_0(t)\|_{H^s \to H^s} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Prop : soient $t_1 \neq t_2$ et $s \in \mathbb{R}$: $\|U_0(t_1) - U_0(t_2)\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} = 2$

Dem : . soit $f \in H^s$: $\|(U_0(t_1) - U_0(t_2))f\|_{H^s} = \|U_0(t_1)f - U_0(t_2)f\|_{H^s}$
$$\leq \|U_0(t_1)f\|_{H^s} + \|U_0(t_2)f\|_{H^s}$$
$$\leq \|f\|_{H^s} + \|f\|_{H^s} = 2\|f\|_{H^s}.$$

Ainsi, $\|U_0(t_1) - U_0(t_2)\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq 2$.

. $\|(U_0(t_1) - U_0(t_2))f\|_{H^s} = \left\|\langle\xi\rangle^s \left(e^{-i\frac{t_1}{2}|\xi|^2} - e^{-i\frac{t_2}{2}|\xi|^2}\right)\hat{f}\right\|_{L^2}$
$$= 2\left\|\langle\xi\rangle^s \sin\left(\frac{t_2-t_1}{4}|\xi|^2\right)\hat{f}\right\|_{L^2}$$

soit ξ_0 tq $\left|\sin\left(\frac{t_2-t_1}{4}|\xi_0|^2\right)\right| = 1$: un tel ξ_0 existe ssi $t_1 \neq t_2$

$\xi_0 = (\xi_{01}, \dots, \xi_{0d})$ avec $(\xi_0)_j = \frac{1}{d}\left(\frac{2\pi}{|t_1-t_2|}\right)^{1/2}$ p. ex.

Si on pouvait prendre $\hat{f} = \delta_{\xi=\xi_0}$, on aurait terminé.

On approche par une fonction de $\mathcal{S}$: $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} e^{-|\xi-\xi_0|^2/2\varepsilon^2}$, et $\varepsilon \to 0$.

$$\|(U_0(t_1)-U_0(t_2))f^\varepsilon\|_{H^s}^2 = 4\int \langle \xi\rangle^{2s} \sin^2\left(\frac{t_2-t_1}{4}|\xi|^2\right)\frac{1}{\varepsilon^d}e^{-|\xi-\xi_0|^2/\varepsilon^2}\,d\xi$$

$$= 4\int \langle \xi+\xi_0\rangle^{2s} \sin^2\left(\frac{t_2-t_1}{4}|\xi+\xi_0|^2\right)\frac{1}{\varepsilon^d}e^{-|\xi|^2/\varepsilon^2}\,d\xi$$

$$= 4\int \underbrace{\langle \varepsilon\eta+\xi_0\rangle^{2s} \sin^2\left(\frac{t_2-t_1}{4}|\varepsilon\eta+\xi_0|^2\right)e^{-|\eta|^2}}_{\leq\; C+\langle\eta\rangle^{2s}}\,d\eta$$

CVD : $\|(U_0(t_1)-U_0(t_2))f^\varepsilon\|_{H^s}^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 4\int \langle\xi_0\rangle^{2s} e^{-|\eta|^2}\,d\eta$

$$= 4\langle\xi_0\rangle^{2s}\int e^{-|\eta|^2}\,d\eta = 4\langle\xi_0\rangle^{2s}\pi^{d/2}$$

$$\|f^\varepsilon\|_{H^s}^2 = \|\langle\xi\rangle^s \widehat{f^\varepsilon}\|_{L^2}^2 = \int \langle\xi\rangle^{2s}\frac{1}{\varepsilon^d}e^{-|\xi-\xi_0|^2/\varepsilon^2}\,d\xi$$

$$= \int \langle\varepsilon\eta+\xi_0\rangle^{2s} e^{-|\eta|^2}\,d\eta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \langle\xi_0\rangle^{2s}\pi^{d/2}$$

Cl : $\forall \delta>0,\ \exists \varepsilon_0>0 \,/\, 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0 \Rightarrow$
$$\|(U_0(t_1)-U_0(t_2))f^\varepsilon\|_{H^s} \geq (2-\delta)\|f^\varepsilon\|_{H^s}$$

$$\Rightarrow \|U_0(t_1)-U_0(t_2)\|_{\mathcal{L}(H^s;H^s)} \geq 2-\delta \qquad \forall\delta>0 \quad \blacksquare$$

Exercice : $p\neq 2$, $t\neq 0$: mq $\displaystyle\sup_{f\in\mathcal{S}-\{0\}} \frac{\|U_0(t)f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}} = \infty$.

ie $U_0(t)$ n'est pas continu $L^p\to L^p$ si $p\neq 2$.

Ind. : prendre $f(x) = e^{-(a+ib)|x|^2/2}$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$
et faire varier a selon qu'on ait $p>2$ ou $p<2$.

Equation de la chaleur : $\partial_t u = \Delta u$

Calcul formel de transformée de Fourier : $\partial_t \hat{u} = -|\xi|^2 \hat{u}$
$\Rightarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$.

→ ressemble plutôt à ce qu'on a trouvé pour Schrödinger.
→ grosse différence toutefois : éq. irréversible.
$u_0 \in \mathcal{S} \Rightarrow$ pour $t>0$, $\xi \mapsto e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) \in \mathcal{S}$: $\hat{u}(t,.) \in \mathcal{S}$.

mais pour $t<0$, on peut partir dans les décors :
ex : $u_0(\xi) = e^{-\langle \xi \rangle}$: $e^{-t|\xi|^2 - \langle \xi \rangle}$, pour $t<0$, n'est même pas dans $\mathcal{S}'$!!
$\Rightarrow$ parallèle avec Schrödinger ok uniquement $t \geq 0$.

Prop : $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: $\exists!\, u \in C([0,\infty[; \mathcal{S})$ / $\partial_t u = \Delta u$; $u|_{t=0} = u_0$.
Pour $t \geq 0$, on a $\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$.

ex : $u_0(x) = g_a(x) = e^{-a|x|^2/2}$, $a>0$.

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} a^{-d/2} e^{-|\xi|^2/2a} = a^{-d/2} e^{-(2t+\frac{1}{a})|\xi|^2/2} \quad : \text{fct paire}$$

$$u(t,x) = a^{-d/2}\left(2t+\frac{1}{a}\right)^{-d/2} e^{-|\xi|^2/2(2t+1/a)}$$

$$= (2at+1)^{-d/2} e^{-|\xi|^2/(4t+2/a)}.$$

Notation : $u(t,x) = S(t)u_0(x)$.

$\|u(t)\|_{H^s} = \|\langle\xi\rangle^s e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{H^s}$: $S(t)$ se prolonge $H^s \to H^s$

Prop : $u_0 \in H^s$: la sol. généralisée vérifie $\partial_t^j u \in C([0,\infty[; H^{s-2j}(\mathbb{R}^d))$.

ex : $u_0 = \delta$: $\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}$ et $u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$.

$t>0$: $u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
$t=0$: $u \in H^s$ ssi $s < -d/2$ } autre argument montrant l'irréversibilité.

Estimations d'énergie :

. $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\,dx = \hat{u}(t,0) = \hat{u}_0(0) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\,dx$: conservation de l'énergie

NB : contrairement au cas de l'éq. de Schrödinger, on peut supposer $u \in \mathbb{R}$ (quitte à séparer Re u et Im u). Pour Schrödinger, on passe forcément dans $\mathbb{C}$.

$u_0 \in \mathcal{S}$: . $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int u(t,x)^2 dx = \int u\, \partial_t u\, dx = \int u \Delta u\, dx$

$$\underset{IPP}{=} - \int |\nabla u|^2 dx \leq 0$$

$t \mapsto \|u(t)\|_2^2$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (on le savait déjà par Fourier)

. $0 = \int \Delta u (\partial_t u - \Delta u) = - \sum_j \int \partial_j u\, \partial_{jt}^2 u - \int (\Delta u)^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int |\nabla u(t,x)|^2 dx \leq 0$ (même remarque).

. soit $\Psi \in C^2(\mathbb{R})$ convexe avec $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$.

$$\frac{d}{dt} \int \Psi(u)\,dx = \int \Psi'(u)\partial_t u = \sum_j \int \Psi'(u)\, \partial_j^2 u\, dx = - \sum_j \int \underbrace{\Psi''(u)}_{\geq 0} \underbrace{(\partial_j u)^2}_{\geq 0} dx$$

$$\leq 0 .$$

Prop : $u \in C([0,\infty[; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ à valeurs réelles et Ψ comme ci-dessus :
$t \mapsto \int \Psi(u(t,x))\,dx$ est une fonction décroissante sur $[0,\infty[$ ..

ex : . $\Psi(s) = \frac{s^2}{2}$: décroissance norme L^2.

. $\Psi(s) = |s|^p$, $2 \leq p < \infty$: $t \mapsto \|u(t)\|_{L^p}$ décroissante $\mathbb{R}_+$.

. $p \to \infty$: $\|u(t)\|_{L^\infty} = \lim_{p\to\infty} \|u(t)\|_{L^p} \leq \lim_{p \to \infty} \|u(0)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^\infty}$.

. $1 \leq p < 2$: $\Psi(s) = |s|^p \notin C^2(\mathbb{R})$

$\Psi^\varepsilon(s) = (\varepsilon + |s|^2)^{p/2} - \varepsilon^{p/2}$

$\int \Psi_\varepsilon(u(t_2, x))dx \leq \int \Psi^\varepsilon(u(t_1,x))\, dx$ si $t_2 \geq t_1$

passage à la limite $\varepsilon \to 0$: CVD.

Rq : * cette méthode pour obtenir des inégalités a l'air moins efficace que l'analyse de Fourier, pour les estimations H^s. Mais :

- est. L^p ci-dessus inaccessibles par Fourier ;
- méthode suffisamment souple pour servir dans des cas où on ne sait pas utiliser l'analyse de Fourier (éq. à coeff. variables, ou éq. non linéaires).

* on peut déduire que $S(t)$ se prolonge de manière unique en un op. continu $L^p \to L^p$, $1 \leq p < \infty$ (fonctions à valeurs réelles).
= autre différence avec Schrödinger.

__Equation des ondes__ $(*)\ \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0\ ;\ u|_{t=0} = f\ ;\ \partial_t u|_{t=0} = g.$

Fourier : $\partial_t^2 \hat{u} + c^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0$: éq. du pendule

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\cos(c|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}.$$

fonctions bornées, régulières ainsi que leurs dérivées en ξ.

Régularité : $\cos(c|\xi|t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(c|\xi|t)^{2j}}{(2j)!}$ et $|\xi|^2$ rég.

$$\frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(c|\xi|t)^{2j}}{(2j+1)!}\, t$$

Prop : si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $(*)$ a une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S})$.
Elle est donnée par $\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\cos(ct|\xi|) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}$.

Conservation de l'énergie : f, g à valeurs réelles $\Rightarrow u$ aussi

$$\frac{d}{dt}\int\left((\partial_t u)^2 + c^2|\nabla u|^2\right)dx = 2\int \partial_t u\, \partial_t^2 u + c^2 \nabla u \cdot \nabla(\partial_t u)$$

$$\underset{IPP}{=} 2\int \partial_t u\, \partial_t^2 u - c^2 \Delta u\, \partial_t u = 2\int \partial_t u\, \Box u = 0.$$

revenir à dire qu'on retrouve cette loi en multipliant l'éq. des ondes par $\partial_t u$ et en intégrant en x.

Autre approche : côté Fourier.

$$\widehat{\partial_t u}(t,\xi) = -c|\xi|\,\hat{f}(\xi)\sin(ct|\xi|) + \hat{g}(\xi)\cos(ct|\xi|)$$

$$c|\xi|\,\hat{u}(t,\xi) = c|\xi|\,\hat{f}(\xi)\cos(ct|\xi|) + \hat{g}(\xi)\sin(ct|\xi|)$$

$$|\widehat{\partial_t u}|^2 = c^2|\xi|^2\,|\hat{f}(\xi)|^2 \sin^2(ct|\xi|) + |\hat{g}(\xi)|^2 \cos^2(ct|\xi|)$$
$$\qquad - 2c|\xi| \cos(ct|\xi|) \sin(ct|\xi|)\ \mathrm{Re}(\bar{\hat{f}}\,\hat{g})$$

$$c^2|\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 = c^2|\xi|^2\,|\hat{f}(\xi)|^2 \cos^2(ct|\xi|) + |\hat{g}(\xi)|^2 \sin^2(ct|\xi|)$$
$$\qquad + 2c|\xi| \cos(ct|\xi|) \sin(ct|\xi|)\ \mathrm{Re}(\bar{\hat{f}}\,\hat{g}).$$

$$|\widehat{\partial_t u}|^2 + c^2|\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 = c^2|\xi|^2|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{g}(\xi)|^2 \quad : \text{ind. } t.$$

. $\int d\xi$ + Plancherel : conservation de l'énergie.

. $\times \langle \xi \rangle^{2(s-1)}$ avant $\int d\xi$: $\dfrac{d}{dt}\left(\|\partial_t u\|^2_{H^{s-1}} + c^2\|\nabla u\|^2_{H^{s-1}}\right) = 0$.

$$E_s = \{(F,G) \ / \ \nabla F \in H^{s-1},\ G \in H^{s-1}\}$$

Th : $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$: le groupe associé à l'éq. des ondes se prolonge de manière unique en une appl. unitaire de E_s dans lui-même.

Rq : notion de groupe d'évolution.

$U(t+s) = U(t)U(s)$: $t,s \in \mathbb{R}$ pour Schrödinger, $t,s \geq 0$ chaleur (semi-groupe)

$U(0) = Id$

Pour l'équation des ondes (ordre 2 en temps), besoin de changer d'inconnue :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \ : \ \partial_t \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2\Delta & 0 \end{pmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{u}(t,x) = U(t)\,\underline{u}_0(x), \text{ avec } \ \hat{\underline{u}}(t,\xi) = \begin{pmatrix} \cos(ct|\xi|) & \dfrac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \\ -c|\xi|\sin(ct|\xi|) & \cos(ct|\xi|) \end{pmatrix} \hat{\underline{u}}_0(\xi)$$

Fonctions de Green

Retour sur la chaleur : $\widehat{S(t)f} = e^{-t|\xi|^2}\hat{f}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

si $\mathcal{F}(K(t)) = (2\pi)^{-d/2} e^{-t|\xi|^2}$, alors

$$\widehat{S(t)f} = (2\pi)^{d/2}\, \widehat{K(t)}\, \hat{f} = \widehat{K(t) * f}.$$

ie $S(t)f = K(t) * f$: $S(t)f(x) = \int K(t, x-y) f(y)\, dy$.

On a déjà calculé : $K(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/(4t)} = S(t)\delta$.

$$S(t) f = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

Idem pour Schrödinger : $U_0(t) f(x) = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y)\, dy$.

Ondes : $\mathcal{F}\left(U(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos ct|\xi| & \frac{\sin ct|\xi|}{c|\xi|} \\ c|\xi| \sin ct|\xi| & \cos ct|\xi| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}$

supp. $\widehat{K(t)} = (2\pi)^{-d/2} \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}$: $K(t) \in \mathcal{S}'$.

$$u = \partial_t (K(t) * f) + K(t) * g.$$

NB : chaleur : $(\partial_t - \Delta) K = 0$; $K|_{t=0} = \delta$
Schrödinger : $(i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta) K = 0$; $K|_{t=0} = \delta$
ondes : $(\partial_t^2 - c^2\Delta) K = 0$; $K|_{t=0} = 0$; $\partial_t K|_{t=0} = \delta$.

Déf : K = solution fondamentale / propagateur / fonction de Green.

Des conséquences

1) Eq. de la chaleur : $K(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$

Th : $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$: la sol. $u = S(t)f \in C^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$.
Les dérivées sont données par les intégrales absolument convergentes :
$$D^\alpha_{t,x} u(t,x) = \int (D^\alpha_{t,x} K)(t, x-y) f(y)dy$$

Dém : 1) $1 \leq p < \infty$: $\exists\ f_n \in \mathcal{S}$ / $f_n \xrightarrow[n\infty]{} f$ dans L^p.

$u_n = S(t) f_n$ cv vers u dans $C([0,\infty[\,; L^p(\mathbb{R}^d))$.
Rappel : $\|S(t)f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ si $f \in \mathcal{S}$ (+ critère de Cauchy...)

approche directe : Young
$$\|S(t)f\|_{L^p} = \|K * f\|_{L^p} \leq \underbrace{\|K(t)\|_{L^1}} \|f\|_{L^p}$$
$$= \int K(t,x)dx \quad \text{car } K > 0$$
$$= (2\pi)^{d/2} \hat{K}(t,0) = 1$$

$u_n \to u \quad \mathcal{D}'(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$

2) $p = \infty$: $f_n \to f$ faible $*$ dans L^∞.
$\Rightarrow u_n \to u$ USTC $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$, donc dans $\mathcal{D}'(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$.

3) Dans tous les cas : u_n régulière, et
$$D^\alpha_{t,x} u_n(t,x) = \int (D^\alpha_{t,x} K)(t,x-y) f_n(y)dy$$

soit $\varepsilon > 0$: $D^\alpha_{t,x} K(t,.)$ bornée dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, unif. en $t \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Hölder : $\int D^\alpha_{t,x} K(\ldots) f_n \xrightarrow[n\infty]{L^\infty} \int D^\alpha_{t,x} K(\ldots) f$

. membre de gauche cv $(\mathcal{D}')$ $D^\alpha_{t,x} u$: unicité de la limite ∎

Positivité

Th: supp. $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour un $s \in \mathbb{R}$, ou $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$.
Si de plus $f \geq 0$, alors pour tout $t \geq 0$, $S(t) f \geq 0$

Dém: $j_\varepsilon \geq 0$ approximation de l'identité, $\chi_\varepsilon \geq 0$ troncature.

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^d j(\varepsilon x) \quad \text{où } j \geq 0 \text{ avec } \int j = 1$$

$$\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x), \qquad \chi \geq 0,$$

$$f_\varepsilon = j_\varepsilon * (\chi_\varepsilon f) \geq 0$$

$$\varphi \in \mathcal{S} : \ \langle S(t) f_\varepsilon, \varphi \rangle \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \langle S(t) f, \varphi \rangle$$

car $S(t) f_\varepsilon \longrightarrow S(t) f$ dans H^s ou L^p.

$S(t) f_\varepsilon = K(t) * f_\varepsilon \geq 0$: fonctions régulières positives

$\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi \geq 0$: à la limite, $\langle S(t) f, \varphi \rangle \geq 0$ ∎

Corollaire: $f, g \in H^{-\infty}$ ou $f, g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$.
Si $f \geq g$, alors $S(t) f \geq S(t) g$ pour tout $t \geq 0$

Dém: $f - g \geq 0$ et $S(t)$ linéaire.

Corollaire: $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $u = S(t) f$: $\forall t \geq 0$,
$\inf \operatorname{ess} f \leq u(t) \leq \sup \operatorname{ess} f$

Comportement en temps grand

$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $|u(t,x)| = \left| \int K(t, x-y)\, f(y)\, dy \right|$

$$\leq \underbrace{\|K(t)\|_{L^\infty}}_{\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}} \|f\|_{L^1}$$

Th : $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $u(t) = S(t) f$:

$$\|u(t)\|_{L^p} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{d/(2p')}} \|f\|_{L^1}$$

Dém : $p = \infty$: cf supra

$p = 1$: on a vu que l'inégalité de Young donne

$$\|u(t)\|_{L^1} \leq \underbrace{\|K(t)\|_{L^1}} \|f\|_{L^1}$$

$$= \int K(t,x)\,dx \quad \text{car } K \geq 0$$

$$= (2\pi)^{d/2} \hat{K}(t,0) = 1$$

$1 < p < \infty$: Riesz-Thorin ∎

Plus précisément ?

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(0) + e^{-t|\xi|^2} \underbrace{\left(\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)\right)}_{\leq |\xi| \, \|\nabla \hat{f}\|_{L^\infty} \text{ (Taylor)}}$$

$\nabla \hat{f} = \mathcal{F}(ix f)$:

$$\|\nabla \hat{f}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|x f\|_{L^1} \text{, si bien sûr } x f \in L^1 \text{ !}$$

Fourier inverse : $\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(0)\, e^{-t|\xi|^2}\right) = (2\pi)^{d/2}\, \hat{f}(0)\, K(t)$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right) K(t)$$

$$\left\| u(t) - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right) K(t) \right\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-d/2} \left\| \hat{u}(t) - \hat{f}(0) e^{-t|\xi|^2} \right\|_{L^1}$$

$$\leq (2\pi)^{-d/2} \left\| e^{-t|\xi|^2} \left(\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)\right) \right\|_{L^1}$$

$$\leq (2\pi)^{-d/2} \left\| e^{-t|\xi|^2} |\xi|\, \|\nabla \hat{f}\|_{L^\infty} \right\|_{L^1}$$

$$\leq (2\pi)^{-d} \| x f \|_{L^1} \, \left\| |\xi| e^{-t|\xi|^2} \right\|_{L^1}$$

$$\int |\xi| e^{-t|\xi|^2} d\xi = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} r e^{-tr^2} r^{d-1} dr\, d\omega$$

$$= C_d \int_0^\infty r^d e^{-tr^2} dr \qquad : \rho = r\sqrt{t}$$

$$= C_d \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^d e^{-\rho^2} \frac{d\rho}{t^{d/2}} = \frac{C}{t^{(d+1)/2}}$$

<u>Cl</u> :

<u>Th</u>: si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ <u>et</u> $x \longmapsto |x| f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\exists C = C(d) /$

$$\left\| S(t) f - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right) K(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{t^{\frac{d+1}{2}}} \| x f \|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

<u>NB</u> : on passe de $\| S(t) f \|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{d/2}}$ à une estimation impliquant un reste plus petit.

$\| K(t) \|_{L^\infty} = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}$: on a vraiment le comportement asymptotique (au 1er ordre) de $S(t) f$.

2) Equation de Schrödinger

Rappel : $U_0(t) f(x) = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y)\,dy$

Comme pour la chaleur, mais $t<0$ autorisé :

Lemme : $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\| U_0(t) f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|2\pi t|^{d/2}} \|f\|_{L^1}$

Prop : $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq 2$: pour $t \neq 0$, $U_0(t) f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, et

$$\| U_0(t) f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{|2\pi t|^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}\right)}} \|f\|_{L^p} .$$

Dem : $p=1$: cf lemme.
$p=2$: Parseval-Plancherel $= U_0(t)$ unitaire L^2.
$1<p<2$: Riesz-Thorin.

NB : . pas d'effet régularisant comme pour la chaleur (éq. réversible)
. il existe une notion d'effet régularisant, qui exige d'intégrer en temps (L^q)
cf plus loin : inégalités de Strichartz.

. pas de propriété type positivité : on travaille dans $\mathbb{C}$...

Comportement en temps grand

Lemme : $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On note $v(t,x) = \dfrac{e^{i\frac{|x|^2}{2t}}}{(it)^{d/2}} \hat{f}\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

Alors $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \| U_0(t) f - v(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Rq : $v(t,x) = \begin{cases} e^{-i d \frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{i\frac{|x|^2}{2t}}}{t^{d/2}} \hat{f}\left(\dfrac{x}{t}\right) & t > 0 \\ e^{+i d\frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{i\frac{|x|^2}{2t}}}{|t|^{d/2}} \hat{f}\left(\dfrac{x}{t}\right) & t < 0 \end{cases}$

Dem : * on remarque la factorisation $U_0(t) = M_t D_t \mathcal{F} M_t$, où

M_t = multiplication par $e^{i\frac{|x|^2}{2t}}$

D_t = dilatation, $(D_t \varphi)(x) = \dfrac{1}{(it)^{d/2}} \varphi\left(\dfrac{x}{t}\right)$

$\mathcal{F}$ = Fourier

* $v(t,x) = M_t D_t \mathcal{F} f$

* M_t, D_t et $\mathcal{F}$ sont unitaires sur L^2 :

$$\|U_0(t) f - v(t)\|_{L^2} = \| M D \mathcal{F} M f - M D \mathcal{F} f \|_{L^2}$$

$$= \| M D \mathcal{F} (M-1) f \|_{L^2} = \| (M-1) f \|_{L^2}.$$

* $|M_t - 1| = |e^{i|x|^2/2t} - 1| \leq 2$
* on conclut par CVD.

Rq : décroissance exponentielle de la chaleur remplacée par des oscillations.

3) Equation des ondes : ondes radiales en dimension 3

Rappel : $d=1$. $(\partial_t^2 - c\partial_x^2)u = 0$, $u \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}) \iff u(t,x) = a(x-ct)+b(x+ct)$
$a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$

Approche Fourier $\rightsquigarrow$ fonction de Green : $u|_{t=0} = f$; $\partial_t u|_{t=0} = g$,

$$u = \partial_t(K(t) * f) + K(t) * g = (\partial_t K(t)) * f + K(t) * g,$$

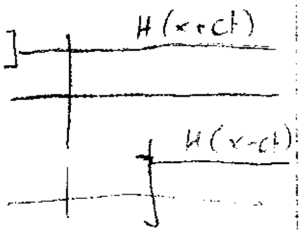
où $\widehat{K(t)} = (2\pi)^{-d/2} \dfrac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}$.

$d=1$: $\dfrac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} = \dfrac{\sin(ct\xi)}{c\xi}$

$$c\xi\,\widehat{K(t)} = (2\pi)^{-d/2}\sin(ct\xi) = (2\pi)^{-d/2}\frac{e^{ict\xi} - e^{-ict\xi}}{2i}$$

FIF : $\partial_x K(t) = \dfrac{\delta_{-ct} - \delta_{ct}}{2c}$

$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$: $\partial_x H = \delta_0$: $\partial_x H(x-a) = \delta_a$



$$\Rightarrow \delta_{-ct} - \delta_{ct} = \partial_x\big(\underbrace{H(x+ct) - H(x-ct)}_{\mathbb{1}_{]-ct,ct]}}\big)$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2c}\mathbb{1}_{]-ct,ct]} + C_0$$

Plancherel : $K \in L^2$, $\mathbb{1}_{]-ct,ct]} \in L^2 \Rightarrow C_0 \in L^2(\mathbb{R})$: $C_0 = 0$.

$$\boxed{K(t) = \frac{1}{2c}\mathbb{1}_{]-ct,ct]}}$$

$$\frac{d}{dt} \langle K(t), \varphi \rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \varphi\right) = \frac{\varphi(ct)+\varphi(-ct)}{2} = \langle \frac{\delta_{ct}+\delta_{-ct}}{2}, \varphi \rangle$$

Il reste donc : $u(t,x) = \dfrac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$

Forme de d'Alembert.

Le cas $d=3$, pour des fonctions radiales.

Laplacien sur $\mathbb{R}^d$ en coordonnées sphériques : $r \geq 0$, $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$$

$d=3$ et $w = w(r)$ ind. $\omega \in \mathbb{S}^{d-1} = \mathbb{S}^2$:

abus de notation : $w(x) = w(r)$

$$\Delta w = \partial_r^2 w + \frac{2}{r}\partial_r w \quad : r\Delta w = r w_{rr} + 2 w_r = (rw)_{rr}$$

(en toute rigueur : $w(x) = \phi(|x|) = \phi(r)$

$$\Delta w = \partial_r^2 \phi + \frac{2}{r}\partial_r \phi = \frac{1}{r}(r\phi)_{rr} \quad)$$

$$\Delta w = \frac{1}{r}(rw)_{rr}$$

on a bien sûr, si w dépend aussi de t : $\partial_t^2 w = \frac{1}{r}(rw)_{tt}$.

Ainsi, si $u = u(t,r)$ est une solution régulière de $(\partial_t^2 - c^2\Delta_{\mathbb{R}^3})u = 0$, alors $v(t,r) := r\,u(t,r)$ vérifie $(\partial_t^2 - \partial_r^2)v = 0$, $r > 0$.

Or u = fct pair de $r \Rightarrow v$ impaire, et $(\partial_t^2 - c^2\partial_r^2)v$ impaire

$\Rightarrow (\partial_t^2 - c^2\partial_r^2)v = 0 \quad \forall t, r \in \mathbb{R}$.

Récip., si $(\partial_t^2 - c^2\partial_r^2)v = 0$, v <u>impaire</u> $\Big\}$ $u(t,x) = \begin{cases} v(t,|x|)/|x| & x \neq 0 \\ \partial_r v(t,0) & x = 0 \end{cases}$ sol. ondes 3D

En effet, $(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0$ pour $x \neq 0$ (on a tout fait pour).

u régulière $\Rightarrow (\partial_t^2 - c^2\Delta)u$ aussi, et nulle partout sauf éventuellement en 0

$\Rightarrow (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0$ partout.

<u>Prop</u> : La correspondance $v(t,r) = r\,u(t,r)$ définit une bijection entre les solutions radiales régulières de $(\partial_t^2 - c^2\Delta_{\mathbb{R}^3})u = 0$ et les solutions impaires régulières de $(\partial_t^2 - c^2\partial_r^2)v = 0$.

D'Alembert : $v = \varphi(ct+r) + \psi(ct-r)$, $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

v impair :
$$v(t,r) = \frac{1}{2}\big(v(t,r) - v(t,-r)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\varphi(ct+r) - \varphi(ct-r) + \psi(ct-r) - \psi(ct+r)\right]$$
$$= F(ct+r) - F(ct-r),$$

où $F(y) = \frac{1}{2}\left[\varphi(y) - \psi(y)\right]$.

<u>Rq</u> : . $F \to F + \text{cst}$ ne change rien.
- récip. $F(ct+r) - F(ct-r)$ impaire, rég. si F l'est, sol. ondes

<u>Prop</u> : $F \longmapsto v$ $\big(v(t,r) = F(ct+r) - F(ct-r)\big)$ définit une bijection entre $C^\infty(\mathbb{R})/_{\mathbb{R}}$ et l'ensemble des sol. régulières impaires de $(\partial_t^2 - c^2\partial_r^2)v = 0$

<u>Cel</u> : l'appl. $F \mapsto u$,
$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}\left[F(ct+|x|) - F(ct-|x|)\right] & x \neq 0 \\ 2F'(ct) & x = 0 \end{cases}$$
définit une bij. entre $C^\infty(\mathbb{R})/_{\mathbb{R}}$ et l'ens. des sol. radiales rég. de
$$(\partial_t^2 - c^2\Delta_{\mathbb{R}^3})u = 0$$

ex. : $(\partial_t^2 - c^2\Delta_{\mathbb{R}^3})u = 0$; $u|_{t=0} = f$; $\partial_t u|_{t=0} = g$

on suppose f, g régulières, radiales, à support dans $B(0,\rho) = \{|x| < \rho\}$

Soient $\tilde{f}(r) = r f(r)$, $\tilde{g}(r) = r g(r)$: fcts rég. impaires.

On veut déterminer F : $u(t,r) = \frac{1}{r}\left(F(ct+r) - F(ct-r)\right)$ $r \neq 0$.

$t=0$: $F(r) - F(-r) = \tilde{f}(r)$ $\Rightarrow F'(r) + F'(-r) = \tilde{f}'(r)$

$c\left(F'(r) - F'(-r)\right) = \tilde{g}(r)$

$\Rightarrow F'(r) = \tilde{f}'(r) + \frac{1}{c}\tilde{g}(r)$

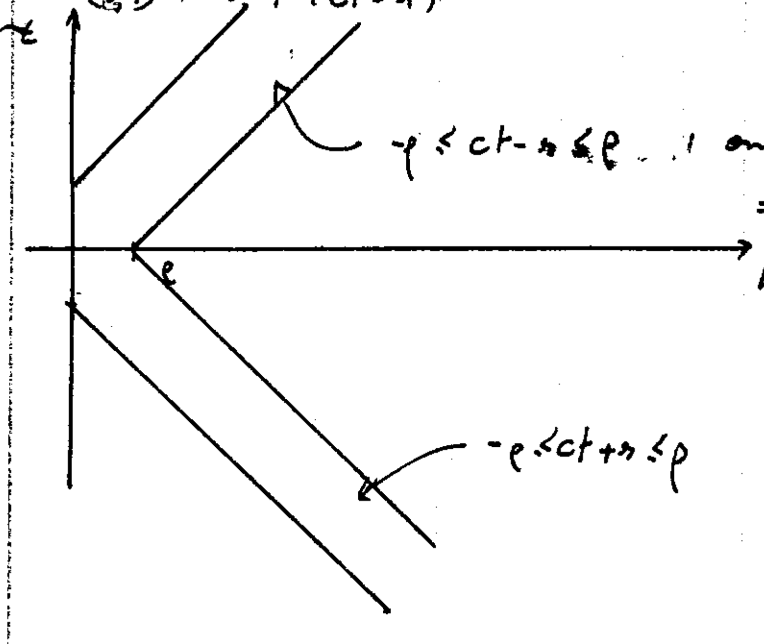
on peut choisir : $F(r) = \int_{-\infty}^{r} \left(\tilde{f}'(s) + \frac{1}{c}\tilde{g}(s)\right) ds$.

$r > \rho$: $F(r) = 0$ ($\tilde{g}$ impaire)
$r < -\rho$: $F(r) = 0$ (évident)
$\Big\}$ supp $F \subset [-\rho, \rho]$.

Des propriétés en temps grand : examinons le support de la solution

$(t,r) \longmapsto F(ct+r)$ supportée dans $-\rho \leq ct+r \leq \rho$

$(t,r) \longmapsto F(ct-r)$ " $-\rho \leq ct-r \leq \rho$



$-\rho \leq ct-r \leq \rho$: onde sortante. $= -\frac{F(ct-r)}{r}$

$-\rho \leq ct+r \leq \rho$: onde entrante $= \frac{F(ct+r)}{r}$

entre les 2 facteur multiplicatif -1