V Analyse de Fourier

Espace de Schwartz

<u>Définition</u> : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) ; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty \}$

<u>Ptés</u> : . espace vectoriel
. semi-normes $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$

<u>ex</u> : . $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
. $f(x) = e^{-|x|^2}$, ou plus généralement $e^{-(1+|x|^2)^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.
. $f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^N} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall N$.

<u>Def</u> : . une suite $g_n \in \mathcal{S}$ cv vers g dans $\mathcal{S}$ ssi $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{2d}$,
$$\|g_n - g\|_{\alpha\beta} \xrightarrow[\infty]{} 0.$$

. distance : $d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|g-f\|_{\alpha\beta}}{1 + \|g-f\|_{\alpha\beta}}$.

<u>Proposition</u> : $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d)$ espace métrique complet.

<u>Dem</u> : soit $(g_n)_n$ de Cauchy pour d : $\forall \alpha,\beta$, $\|g_n - g_m\|_{\alpha\beta} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

$K \subset \mathbb{R}^d$ compact . $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha g_n$ bornée unif (par rapport à n) sur K

Arzela-Ascoli $\Rightarrow$ une sous-suite cv vers $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,
avec cvU sur tout compact pour $\partial^\alpha g_n$ $\forall \alpha$.

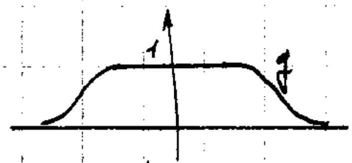
K fixé : $\sup_{x \in K} |x^\alpha \partial^\beta g(x)| = \lim_{n\,\infty} \sup_K |x^\alpha \partial^\beta g_{\varphi(n)}(x)| \leq \overline{\lim} \|g_n\|_{\alpha\beta}$

est. ind. K $\Rightarrow g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\sup_K |x^\alpha \partial^\beta (g_n - g)| = \lim_{k\to\infty} \left(\sup_K |x^\alpha \partial^\beta (g_n - g_{\varphi(k)})| \right)$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \|g_n - g_{\varphi(k)}\|_{\alpha\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

<u>Autres propriétés</u> :



. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $g(x) = 1$ x près de 0

$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $g(\varepsilon x) f(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(x)$ pour d.

. conséquence : $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

. $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k, \mathbb{C})$, $F(0) = 0$, $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq j \leq k$:

$x \longmapsto F(f_1(x), \dots, f_k(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$(f_1, \dots, f_k) \longmapsto F(f_1, \dots, f_k)$ continue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^k \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

<u>ex</u> : $(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi\psi$ bilinéaire continue $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

<u>Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$</u>

<u>Déf</u> : $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: $\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx$.

<u>Ppté</u> : . $|\hat{u}(\xi)| \leq \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int |u| \leq c \|(1+|x|)^{d+1} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$

$\Rightarrow \hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

. $\hat{u} \in C(\mathbb{R}^d)$: Lebesgue.

. dérivation sous le signe $\int$ (Lebesgue) : $\partial_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \mathcal{F}\left((-ix)^\alpha u\right)$.

. $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int e^{-ix\cdot\xi} \partial^\alpha u\, dx$: IPP

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \left[(-\partial)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\right] u(x)\, dx$$

$$= i^\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi).$$

Lemme : si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et si on note $D_x = \frac{1}{i}\partial_x$

- $D_\xi^\alpha \hat{u} = \mathcal{F}\left((-x)^\alpha u\right)$
- $\mathcal{F}\left(D_x^\alpha u\right) = \xi^\alpha \hat{u}$
- Plus généralement : $P \in \mathbb{C}[X]$, $\mathcal{F}(P(D)u) = P(\xi)\hat{u}$

ex : transformée de Fourier des gaussiennes.

$a > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$

$$f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-a|x|^2/2} dx$$

D'après ci-dessus, $f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (-ix) e^{-ix\xi} e^{-ax^2/2} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix\xi} \underbrace{(-ix) e^{-ax^2/2}}_{\frac{i}{a}\frac{d}{dx}\left(e^{-ax^2/2}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{a} \int e^{-ix\xi} \frac{d}{dx}\left(e^{-ax^2/2}\right) dx$$

$$= -\frac{i}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d}{dx}\left(e^{-ix\xi}\right) e^{-ax^2/2} dx = -\frac{\xi}{a} f(\xi).$$

Cl : $f'(\xi) = -\frac{\xi}{a} f(\xi) \Rightarrow f(\xi) = f(0) e^{-\xi^2/(2a)}$.

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-ax^2/2} dx \qquad y = x\sqrt{a}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-y^2/2} dy}$$

$$I^2 = \int_{x=0}^\infty \int_{y=0}^\infty e^{-(x^2+y^2)/2} dx\,dy = \int_{r=0}^\infty \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} : I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Cl: $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\xi^2/(2a)}$; sur $\mathbb{R}^d$: $g(x) = e^{-a_1 x_1^2/2 - a_2 x_2^2/2 - \cdots - a_d x_d^2/2}$

$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_d}} e^{-\frac{\xi_1^2}{2a_1} - \cdots - \frac{\xi_d^2}{2a_d}}$.

Proposition : Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

. L'application $u \mapsto \hat{u}$ est continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même.

Dem : Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$; $|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi)| = |\mathcal{F}(D_x^\alpha(x^\beta u))|$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \| D_x^\alpha (x^\beta u)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \| (1+|x|)^{d+1} \partial_x^\alpha (x^\beta u)\|_{L^\infty}$$

Ainsi, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi)| < \infty$: $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ dans $\mathcal{S}$, on remplace u par $u_n - u$ ci-dessus ($\mathcal{F}$ est linéaire !), et on déduit $\hat{u}_n \to \hat{u}$ dans $\mathcal{S}$.

Notation : . $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\sigma_\lambda u)(x) = u(\lambda x)$: dilatation

. $h \in \mathbb{R}^d$: $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$: translation

Prop : $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $h \in \mathbb{R}^d$:

(i) $\mathcal{F}(\tau_h u)(\xi) = e^{-ih\cdot\xi} \hat{u}(\xi)$.

(ii) $\mathcal{F}(e^{ih\cdot x} u)(\xi) = \tau_h \hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi - h)$.

(iii) $\mathcal{F}(\sigma_\lambda u)(\xi) = |\lambda|^{-d} \hat{u}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

Dem : exercice.

Remarque fondamentale : $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\,d\xi = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\psi(\xi)\frac{d\xi\,dx}{(2\pi)^{d/2}} \quad : \text{Fubini}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^{d/2}}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx$$

En notant $(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx$: produit scalaire $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$

cette identité s'écrit aussi : $(\mathcal{F}\varphi, \psi) = (\varphi, \tilde{\mathcal{F}}\psi)$,

où $\tilde{\mathcal{F}}\psi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{+i x.\xi}\psi(x)dx$

<u>NB</u> : au moins formellement, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^*$, op. adjoint de $\mathcal{F}$.

On va montrer la propriété cruciale : $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id$ (sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

<u>Lemme</u> Soient $j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int j = 1$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ continue en 0. Alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int u(x)\, \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = u(0)$$

<u>Dém</u> : . on remarque $u(0) = u(0)\int j(x)dx = \int u(0)\varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx$.

. soit $\eta > 0$: par hyp., $\exists\, \delta > 0 /\ |x| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(0)| < \eta$.

$$\left| \int u(x)\varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx - u(0)\right| = \left|\int (u(x)-u(0))\,\varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx\right|$$

$$\leq \eta \int_{|x|<\delta} \left|\varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx + \int_{|x|\geq\delta} |u(x)-u(0)|\left|\varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx$$

$$\leq \eta \|j\|_{L^1} + 2\|u\|_{L^\infty} \int_{|x|\geq\delta} \left|\varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx$$

$$\leq \eta \|j\|_{L^1} + 2\|u\|_{L^\infty} \underbrace{\int_{|y|\geq\frac{\delta}{\varepsilon}} |j(y)|dy}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \text{ par CVD}}$$

$$\leq \eta(1 + \|j\|_{L^1}) \text{ si } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon(\eta) \ \blacksquare$$

Th (Formule d'inversion de Fourier). $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(*) \quad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i x\cdot\xi} \hat{u}(\xi) d\xi = \mathcal{F}^* \mathcal{F} u$$

<u>Dem</u> : . on va prendre $j(x) = v(x)$ avec $v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/2}$

On a bien $v \in L^1$, et $\int_{\mathbb{R}^d} v = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx\right)^d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\left(2\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx\right)^d = \frac{(2\pi)^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}} = 1$

. $(*)$ en $x = 0$: $u(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int u(x) \varepsilon^{-d} v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int u(x) \varepsilon^{-d} (\sigma_{1/\varepsilon} v)(x) dx$$

NB : on a déjà remarqué $\hat{v} = v$

$$\Rightarrow u(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int u(x) \varepsilon^{-d} \underbrace{(\sigma_{1/\varepsilon} \hat{v})}_{\varepsilon^d \mathcal{F}(\sigma_\varepsilon v)}(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int u(x)\, \mathcal{F}(\sigma_\varepsilon v) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \hat{u}(\xi) (\sigma_\varepsilon v)(\xi) d\xi \quad \text{d'après la remarque fondamentale.}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \hat{u}(\xi)\, v(\varepsilon\xi) d\xi = \underbrace{v(0)}_{1/(2\pi)^{d/2}} \int \hat{u}(\xi) d\xi \quad \text{par CVD}$$

<u>Cl</u> : $(*)$ vraie en $x = 0$

Pour le cas général, on utilise à nouveau des astuces algébriques :

$$u(x) = (\tau_{-x} u)(0) = (2\pi)^{-d/2} \int \underbrace{\mathcal{F}(\tau_{-x} u)(\xi)}_{e^{i x\cdot\xi} \hat{u}(\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i x\cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \quad \blacksquare$$

<u>Corollaire</u> : La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $\mathcal{F}^*$.

La transformée de Fourier sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq 2$

<u>Prop</u> : supp. X espace normé, $E \subset X$ espace dense, Y Banach.
Si $T : E \to Y$ appl. linéaire continue ($\exists c, \forall e \in E, \|Te\|_Y \leq c\|e\|_X$)
alors il existe une unique appl. linéaire continue $\tilde{T} : X \to Y$ /
$$\tilde{T}_{|E} = T$$

<u>Dem</u> : exercice.

Rappel : $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

On va définir la transformée de Fourier sur L^1 et sur L^2 :

<u>Lemme</u> : $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 1) $\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_1$

2) $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 = \|\mathcal{F}^* f\|_2$

<u>Dem</u> : 1) : immédiat

2) : $\|\hat{f}\|_2^2 = \int \mathcal{F}f \, \overline{\mathcal{F}f} = \int f \, \overline{\mathcal{F}^*\mathcal{F} f} = \int |f|^2 = \|f\|_2^2$.

<u>Th</u> : $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ se prolonge de manière unique en une appl. linéaire continue $L^1(\mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}^d)$ (fonctions continues bornées) de norme égale à $(2\pi)^{-d/2}$.
On a alors, pour $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix.\xi} u(x) dx$

au sens ~~des~~ égalité entre fonctions continues

Dém : . $\mathcal{S}$ dense dans L^1, et Lemme 1)

. Norme atteinte en $\xi = 0$ si $u \geq 0$ (ex : gaussienne)

. Formule : $u_n \in \mathcal{S}$, $u_n \xrightarrow{L^1} u$

$\Rightarrow \hat{u}_n \longrightarrow \hat{u}$ dans C_b : $\hat{u}_n(\xi) \longrightarrow \hat{u}(\xi)$ $\forall \xi$ en particulier

$$\text{or } \hat{u}_n(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix.\xi} u_n(x)dx \xrightarrow[\infty]{} (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix.\xi} u(x)dx,$$

$$\text{car } \left| \int e^{-ix.\xi} u_n(x)dx - \int e^{-ix.\xi} u(x)dx \right| \leq \|u_n - u\|_{L^1} \blacksquare$$

Th : (Riemann - Lebesgue)

Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u}(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$.

Dém : . supposons d'abord $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$(2\pi)^{d/2} \hat{u}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} u(x)dx = \frac{1}{|\xi|^2} \sum_{j=1}^{d} \int \xi_j^2 e^{-ix.\xi} u(x)dx$$

$$\text{on remarque } \xi_j^2 e^{-ix.\xi} = -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(e^{-ix.\xi})$$

$$(2\pi)^{d/2} \hat{u}(\xi) = \frac{-1}{|\xi|^2} \sum_{j=1}^{d} \int \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(e^{-ix.\xi}) u(x)dx \quad : \text{IPP en } x_j \text{ (2 fois)}$$

$$= -\frac{1}{|\xi|^2} \sum_{j=1}^{d} \int e^{-ix.\xi} \partial_j^2 u(x)dx$$

$$= -\frac{1}{|\xi|^2} \int e^{-ix.\xi} \Delta u(x)dx$$

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|^2 (2\pi)^{d/2}} \|\Delta u\|_{L^1} \xrightarrow[|\xi| \infty]{} 0.$$

. $u \in L^1$ approché $u_n \in \mathcal{S}$: $\|u - u_n\|_{L^1} \leq \varepsilon$

$$\text{et } |\hat{u}(\xi)| \leq |\hat{u}(\xi) - \hat{u}_n(\xi)| + |\hat{u}_n(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|u - u_n\|_{L^1} + |\hat{u}_n(\xi)|$$

1) n assez grand ; 2) n fixé, $|\xi| \gg 1$ $\blacksquare$

Th (Plancherel) Les appl. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ se prolongent de manière unique en des appl. unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id$!

Dem : Lemme 2) et $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id$ car il s'agit d'appl. linéaires continues sur L^2, coïncident sur $\mathcal{S}$ dense.

NB : si $u \in L^2 \setminus L^1$ (ex : $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ sur $\mathbb{R}$), alors la formule

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix.\xi} u(x)\,dx$$ n'a pas de sens.

Cl : $\mathcal{F}$: $\left.\begin{array}{l} L^1 \longrightarrow L^\infty \\ L^2 \longrightarrow L^2 \end{array}\right\}$ entre les deux ?

Un résultat d'interpolation : le th. de Riesz-Thorin.

. T appl. linéaire de $L^p(\Omega, d\mu)$ dans $L^q(U, d\nu)$:

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

. on suppose en outre T bornée $L^p \to L^q$: $M = \sup_{f \neq 0} \dfrac{\|Tf\|_{L^q}}{\|f\|_{L^p}} < \infty$.

T bornée $L^{p_1} \to L^{q_1}$ et $L^{p_2} \to L^{q_2}$: entre les deux ?

<u>Lemme des trois droites d'Hadamard</u>. Soit F analytique dans la bande ouverte $\{0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ continue et bornée dans la bande fermée $\{0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$.

Si $|F(it)| \leq M_0$ et $|F(1+it)| \leq M_1$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$

alors $\forall \theta \in [0,1]$, $\quad |F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Dem. soient $\varepsilon>0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On pose $F_\varepsilon(z)=e^{\varepsilon z^2+\lambda z}F(z)$

$$|F_\varepsilon(z)| = e^{\varepsilon \operatorname{Re}(z^2)+\lambda \operatorname{Re} z}|F(z)| \leq e^{\varepsilon-\varepsilon(\operatorname{Im} z)^2+\lambda\operatorname{Re} z}|F(z)| \xrightarrow[\operatorname{Im} z\to\pm\infty]{} 0 .$$

$$|F_\varepsilon(it)| \leq M_0 \qquad ; \quad |F_\varepsilon(1+it)| \leq M_1 e^{\varepsilon+\lambda}$$

Principe du maximum dans $\{0<\operatorname{Re} z<1\}$:

$$|F_\varepsilon(z)| \leq \max\left(M_0 \ , M_1 e^{\varepsilon+\lambda}\right)$$

ie $$|F(\theta+it)| = e^{-\varepsilon \operatorname{Re}(\theta+it)^2-\lambda\theta}|F_\varepsilon(\theta+it)|$$

$$= e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)-\lambda\theta}|F_\varepsilon(\theta+it)| \leq e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)}\max\left(M_0 e^{-\lambda\theta}, M_1 e^{(1-\theta)\lambda+\varepsilon}\right)$$

On fixe $\theta\in[0,1]$, $t\in\mathbb{R}$: $\varepsilon\to 0$ donne

$$|F(\theta+it)| \leq \max\left(M_0 e^{-\lambda\theta}, M_1 e^{(1-\theta)\lambda}\right) = \max\left(M_0\rho^{-\theta}, M_1\rho^{1-\theta}\right)$$

où $\rho=e^\lambda>0$. On optimise : $M_0\rho^{-\theta}=M_1\rho^{1-\theta} \iff \rho=\frac{M_0}{M_1}$.

Il reste $\quad |F(\theta+it)| \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ ∎

Th (Riesz-Thorin) Supp. $p_0\neq p_1$ et $q_0\neq q_1$. On suppose aussi T linéaire

$$T: L^{p_j}(\Omega,d\mu) \longrightarrow L^{q_j}(U,d\nu)$$ continue, de norme M_j, $j=0,1$

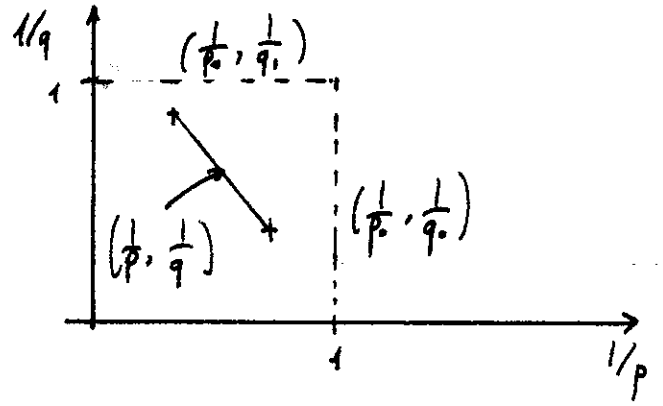
Alors $T: L^p(\Omega,d\mu)\longrightarrow L^q(U,d\nu)$, de norme

(1) $$M \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$$

où $\theta\in]0,1[$ et

(2) $$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1} \quad ; \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1} .$$

Rq : . (1) = $\ln M$ fonction convexe.
. interprétation géométrique de (2) :



Dém : $\langle h, g \rangle = \int_U h(y) g(y)\, d\nu$: Hölder $\Rightarrow$ $\|h\|_{L^q} = \sup\left\{ |\langle h, g\rangle| \,;\, \|g\|_{L^{q'}} = 1 \right\}$

$\Rightarrow$ $M = \sup\left\{ |\langle Tf, g \rangle| ,\ \|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{q'}} = 1 \right\}$.

p, q' sont finis : on peut supposer f et g continues à support compact.

Pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, on note $\dfrac{1}{p(z)} = \dfrac{1-z}{p_0} + \dfrac{z}{p_1}$; $\dfrac{1}{q(z)} = \dfrac{1-z}{q_0} + \dfrac{z}{q_1}$,

$\varphi(z) = \varphi(x, z) = |f(x)|^{p/p(z)} \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$, $x \in \Omega$

$\psi(z) = \psi(y, z) = |g(y)|^{q'/q'(z)} \dfrac{g(y)}{|g(y)|}$, $y \in U$

$\varphi(z) \in L^{p_j}$, $\psi(z) \in L^{q_j'}$ (f et $g \in C_c$)

$\Rightarrow T\varphi(z) \in L^{q_j}$

$\varphi'(z) \in L^{p_j}$, $\psi'(z) \in L^{q_j'}$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$: $\varphi'(z) = p\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right) \log |f(x)|\, \varphi(z)$
et on garde une puissance > 0 de $|f(x)|$ dans φ
pour $\operatorname{Re} z \notin \{0, 1\}$ (on peut avoir $p_0 = \infty$ p.ex.)

$\Rightarrow$ $T(\varphi') \in L^{q_j}$.

$F(z) := \langle T\varphi(z), \Psi(z) \rangle \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$

$\to$ F analytique $0 < \operatorname{Re} z < 1$

$\to$ F bornée continue $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$

$\|\varphi(it)\|_{L^{p_0}} = \| |f|^{p/p_0} \|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{p/p_0} = 1$

$\|\varphi(1+it)\|_{L^{p_1}} = 1 \quad ; \quad \|\Psi(it)\|_{L^{q_0'}} = \|\Psi(1+it)\|_{L^{q_1'}} = 1.$

$\Rightarrow \quad |F(it)| \leq \|T\varphi(it)\|_{L^{q_0}} \, \|\Psi(it)\|_{L^{q_0'}} \leq M_0$

$|F(1+it)| \leq M_1.$

or $\varphi(\theta) = f$, $\Psi(\theta) = g$ donc $F(\theta) = \langle Tf, g \rangle$

Hadamard $\Rightarrow |\langle Tf, g\rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ ∎

<u>Appl</u> : $\Omega = U = \mathbb{R}^d$; $d\mu = d\nu = dx$ Lebesgue.

<u>Corollaire (Inégalité de Hausdorff-Young)</u> : $1 \leq p \leq 2$,

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

où $\mathcal{F} : L^p \to L^{p'}$ par Riesz-Thorin

<u>Dém</u> : $\|\mathcal{F}u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|u\|_{L^1} \quad ; \quad \|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$

$(p_0, q_0) = (1, \infty)$, $M_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2}$; $(p_1, q_1) = (2, 2)$, $M_1 = 1$

$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$; $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p'}$, $\therefore q = p'$.

$\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$

Rq : preuve de l'inégalité de Young. $k \in L^q$, $Tf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y)\,dy$

Hölder : $\|Tf\|_{L^\infty} \leq \|k\|_{L^q} \|f\|_{L^{q'}}$ ($f \in C_0^\infty$)

Minkowski : $\|Tf\|_{L^q} \leq \|k\|_{L^q} \|f\|_{L^1}$

$T : L^{q'} \to L^\infty$ et $L^1 \to L^q$: $L^p \to L^r$, où

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q'} + \frac{\theta}{1} \quad ; \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q'} \quad \text{et} \quad 1 \leq p \leq q'$$

Cl : $k \in L^q$, $f \in L^p$, $1 < p < q'$: $f * k \in L^r$ pour $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$
et $\|k * f\|_{L^r} \leq \|k\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$.

Distributions tempérées

Déf : une distribution tempérée est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distri. tempérées.

Prop : Une appl. linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ est continue ssi $\exists n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$,
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{\substack{|\alpha| \leq n \\ |\beta| \leq n}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

ex : . P polynôme (de degré m) : $\langle P, \varphi \rangle = \langle (1+|x|^2)^{-M} P, (1+|x|^2)^M \varphi \rangle$

$$\leq \underbrace{\|(1+|x|^2)^{-M} P\|_{L^1}}_{\text{ok si } M \gg 1} \|(1+|x|^2)^M \varphi\|_{L^\infty}$$

. de même, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ définit une distri. tempérée.

. $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Déf (cv faible) Une suite T_n de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ cv vers $T \in \mathcal{S}'$ ssi

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$$

On écrit $T_n \to T$.

ex : $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0) = 1$: $\mathcal{S}'\text{-}\lim_{n\infty} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) T = T$

En effet, pour $\psi \in \mathcal{S}$, $\langle \varphi(\frac{x}{n}) T, \psi \rangle = \langle T, \varphi(\frac{x}{n}) \psi \rangle$
et $\varphi(\frac{x}{n})\psi \to \psi$ dans $\mathcal{S}$.

Rq : famille non dénombrable de semi-normes : $|T|_\psi = |\langle T, \psi \rangle|$, $\psi \in \mathcal{S}$
$\mathcal{S}'$ ne peut pas être équipé de métrique.

Prop : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Dem : troncature et régularisation

. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0) = 1$: $\varphi(\frac{x}{n}) T$ distri. à support compact.

. $j \in C_0^\infty$, $\int j = 1$, $j(-x) = j(x)$: $j_n(x) = n^d j(nx) \to \delta$

$$T_n := j_n * \left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) T\right) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}.$$

$$\langle T_n, \psi \rangle = \langle T, \underbrace{\varphi\left(\frac{x}{n}\right)(j_n * \psi)}_{\downarrow n\infty \; \psi} \rangle$$

car $\varphi(\frac{x}{n})(j_n * \psi) - \psi(x) = \int \varphi(\frac{x}{n}) \left(\psi\left(x + \frac{y}{n}\right) - \psi(x)\right) j(y)\, dy$.

Soit $L : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ linéaire continue. La transposée de L est l'appl. $L' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ /

$$\langle L'T, \varphi \rangle = \langle T, L\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{S}'.$$

Prop : supp. $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ appl. linéaire continue et que la restriction de L' à $\mathcal{S}$ est continue $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Alors L a un unique prolongement continu (séquentiellement) $L : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$:

$$\langle LT, \varphi \rangle = \langle T, L'\varphi \rangle \quad \forall T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}.$$

Dem : soit $\tilde{L}$ un tel prolongement : $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$, $T_n \in \mathcal{S}$, $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$:

$$\begin{array}{ccc} \langle L T_n, \varphi \rangle & = & \langle T_n, L'\varphi \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle \tilde{L} T, \varphi \rangle & & \langle T, L'\varphi \rangle . \end{array}$$

récip. : ok ∎

Appl : $L = \partial^\alpha$: $\langle (\partial^\alpha)' T, \varphi \rangle = \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ par déf.

si $T \in \mathcal{S}$: IPP $\leadsto \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \int T(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = \int (-\partial)^\alpha T(x) \varphi(x) dx$

$\Rightarrow (\partial^\alpha)' |_{\mathcal{S}} = (-\partial)^\alpha$.

et $(\partial^\alpha)' = (-\partial)^\alpha$ sur $\mathcal{S}'$.

L	$L'\vert_{\mathcal{S}}$
∂^α	$(-\partial)^\alpha$
τ_h	τ_{-h}
σ_k	$k^{-d} \sigma_{1/k}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Th : $h \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$: $\partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k, \mathcal{F}$, déf. de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, ont chacun un unique prolongement en une appl. cont. $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$: $\forall\, T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$< \partial^\alpha T, \varphi > = < T, (-\partial)^\alpha \varphi >$$
$$< \tau_h T, \varphi > = < T, \tau_{-h} \varphi >$$
$$< \sigma_k T, \varphi > = < T, k^{-d} \sigma_{1/k} \varphi > = k^{-d} < T, \sigma_{1/k} \varphi >$$
$$< \mathcal{F} T, \varphi > = < T, \mathcal{F} \varphi >$$

ex : . $T = 1$

$$< \mathcal{F}1, \varphi > = < 1, \mathcal{F}\varphi > = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{d/2}\varphi(0) \quad \text{par FIF.}$$
$$= < (2\pi)^{d/2}\delta, \varphi >$$

$\Rightarrow \mathcal{F}1 = (2\pi)^{d/2}\delta$.

. $T = \delta$: $< \mathcal{F}\delta, \varphi > = < \delta, \mathcal{F}\varphi > = \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-d/2}\int \varphi(x)\,dx$
$= < (2\pi)^{-d/2}, \varphi >$

$$\mathcal{F}\delta = (2\pi)^{-d/2}.$$

Appl : $(1 - \Delta)\, u = f$

Prop : soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: $\exists!$ sol. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de $(1-\Delta)u = f$.
Elle est donnée par $\hat{u} = (1 + |\xi|^2)^{-1}\hat{f}$.
Ainsi : . si $f \in \mathcal{S}$, alors $u \in \mathcal{S}$
. si $f \in L^2$, alors $\forall |\alpha| \leq 2$, $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Dem : dernier point uniquement

$$\mathcal{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \hat{u} = \underbrace{\frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}}_{L^\infty} \underbrace{\hat{f}}_{L^2} \in L^2 \; + \text{Plancherel.}$$

<u>Th</u> (Théorème de Liouville généralisé) Soit $P(D)$ un opérateur aux dérivées partielles à coeff. constants, tq $P(\xi) \neq 0$ si $\xi \neq 0$. Si $u \in \mathcal{S}'$ vérifie $P(D)u = 0$, alors u est un polynôme en x

<u>ex</u> : . $P(D) = 1 - \Delta$ ie $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$

. $P = \partial_t^2 - \Delta$: $P(\tau, \xi) = |\xi|^2 - \tau^2$: le th ne s'applique pas (op. hyperbolique).

. op. elliptique homogène.

<u>Dem</u> : $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow P(D)u \in \mathcal{S}'$: $0 = \mathcal{F}(P(D)u) = P(\xi)\hat{u}$

$\Rightarrow \operatorname{supp} \hat{u} \subset \{0\}$

$$\Rightarrow \hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta$$

$$u = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \mathcal{F}^*(D^\alpha \delta) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha (-x)^\alpha \underbrace{\mathcal{F}^* \delta}_{(2\pi)^{-d/2}} \blacksquare$$

<u>Convolution</u>

$$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : (\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy$$

Lebesgue : $\varphi * \psi \in C(\mathbb{R}^d)$, $\varphi * \psi(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$

$$\varphi * \psi \in C^\infty \text{ et } D^\alpha(\varphi * \psi) = (D^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * D^\alpha \psi.$$

Hölder : $\|\varphi * \psi\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^{p'}}$

Young (...)

Fubini : $\|\varphi * \psi\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^1} \|\psi\|_{L^1}$

$\varphi * \psi \in L^1$, donc $\mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix\cdot\xi} \left(\int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy \right) dx$

Fubini : $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int \psi(y) \underbrace{\left(\int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x-y) \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \right)}_{\mathcal{F}(\tau_y \varphi) = e^{-iy\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)} dy$

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} \psi(y)\, \hat{\varphi}(\xi)\, dy = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi}(\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

Prop : $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ appl. bilinéaire continue.
$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi * \psi$

Transposé : $T \in \mathcal{S}$, $\langle \varphi * T, \psi \rangle = \int (\varphi * T)(x)\, \psi(x)\, dx$

$$= \iint \varphi(x-y)\, T(y) \psi(x)\, dx\, dy$$

$$= \int T(y) \left(\int \check{\varphi}(y-x) \psi(x)\, dx \right) dy, \quad \check{\varphi}(z) = \varphi(-z).$$

$$= \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle$$

Prop : $\varphi \in \mathcal{S}$: l'op. $\varphi *$. se prolonge de manière unique en un op. séquentiellement continu de $\mathcal{S}'$ dans lui-même. De plus

$$\langle \varphi * T, u \rangle = \langle T, \check{\varphi} * u \rangle$$

$$\mathcal{F}(\varphi * T) = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi}\, \hat{T}$$

$$D^\alpha(\varphi * T) = (D^\alpha \varphi) * T = \varphi * D^\alpha T$$

Prop : $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto T * \varphi$ se prolonge de manière unique en une appl. continue $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, avec
$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle$

Dm : formule OK $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ et $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ cont. $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

ex : . $\delta * \; = Id$
. $(D^\alpha \delta) * \; = D^\alpha$
. $f \in \mathcal{S}$: $(1-\Delta) u = f \iff \hat{u}(\xi) = \dfrac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2}$.

si $\hat{K} = \dfrac{(2\pi)^{-d/2}}{1+|\xi|^2}$, alors $\hat{u} = \widehat{K * f}$, ie $u = K * f$.

K unique sol. $\mathcal{S}'$ de $(1-\Delta) K = \delta$

Def : K = fonction de Green.

Espaces de Sobolev (sur L^2)

. Sur $\mathbb{R}^d$, on définit $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ pour $s \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$ par $W^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \, / \, D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^d), |\alpha| \leq s \}$

dérivée au sens de $\mathcal{D}'$.

. Dans le cas $p=2$, le th. de Plancherel nous dit que $u \in L^2 \iff \hat{u} \in L^2$.
Or $\mathcal{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \hat{u}$, donc on a un autre moyen de manipuler les espaces de Sobolev.

Rq : $p = 2$, on note $W^{s,2} = H^s$.

Prop : $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. LASSE

(1) $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^2$ (au sens des distributions)

(2) $\xi \mapsto \xi_1 \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$

déf : $s \in \mathbb{R}$: $H^s(\mathbb{R}^d) = \{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \;/\; \xi \mapsto \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2 \}$

où $\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$.

$|u|_{H^s} := \| \langle \xi \rangle^s \hat{u} \|_{L^2}$.

Prop : $s \in \mathbb{R}$: $H^s(\mathbb{R}^d)$ espace de Hilbert séparable.

Dem : exercice.

ex : . $\langle \xi \rangle^s \mathcal{F}\delta = \langle \xi \rangle^s (2\pi)^{-d/2} \in L^2 \iff s < -d/2$

$\Rightarrow \delta \in H^s(\mathbb{R}^d)$ ssi $s < -d/2$.

. $f(x) \equiv 1$: $f \notin H^s \quad \forall s$

Prop : $-\infty < s < t < \infty$: $\mathcal{S} \subset H^s \subset H^t \subset \mathcal{S}'$, et chaque inclusion est continue.

Dem : * $\mathcal{S} \subset H^s$: $u_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{S}$ $\Rightarrow (1+|x|^2)^d (1-\Delta)^M u_n \xrightarrow{L^\infty} 0$.

$\Rightarrow (1-\Delta)^M u_n \xrightarrow{L^2} 0$, car $x \mapsto (1+|x|^2)^{-d} \in L^2$.

$\overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} \langle \xi \rangle^{2M} \hat{u}_n \xrightarrow{L^2} 0$: $M = \frac{s}{2}$ -

* $H^s \subset H^t$: $\langle \xi \rangle^{2s} \leq \langle \xi \rangle^{2t}$.

$u \in H^s$, $\varphi \in \mathcal{S}$: $|\langle u, \varphi \rangle| = |\langle \hat{u}, \hat{\varphi} \rangle| = \left| \int \langle \xi \rangle^s \hat{u} \, \langle \xi \rangle^{-s} \hat{\varphi} \, d\xi \right|$

$$\leq \|u\|_{H^s} \|\varphi\|_{H^{-s}}$$

Ainsi, $u_n \xrightarrow{H^s} 0 \Rightarrow u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} 0$ ∎

Rq. Cauchy-Schwarz (et récip.) $\Rightarrow \|u\|_{H^s} = \sup \left\{ \int u\varphi \ ; \ \varphi \in \mathcal{S}, \|\varphi\|_{H^{-s}} = 1 \right\}$

ex : $P(D)$ op. dérivées partielles à coeff. constants, d'ordre m :
$|P(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^m$.
$\Rightarrow P : H^s \to H^{s-m}$.

Prop : $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$. L'appl. $u \mapsto \varphi u$ est continue de H^s dans H^s, et
$$\|\varphi u\|_{H^s} \leq c(s,d) \, \| \langle \xi \rangle^{|s|} \hat{\varphi} \|_{L^1} \|u\|_{H^s}$$

Dem : $\widehat{\varphi u} = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi} * \hat{u}$

$$(2\pi)^{-d/2} \langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi u} = \int \langle \xi \rangle^s \hat{\varphi}(\xi - \eta) \hat{u}(\eta) d\eta = \int \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \eta \rangle^s} \hat{\varphi}(\xi - \eta) \underbrace{\langle \eta \rangle^s \hat{u}(\eta)}_{L^2} d\eta$$

But : appliquer l'inégalité de Young $\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}$

Pour reconnaître une convolution, on espère :

$$(*) \qquad \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \eta \rangle^s} \leq c \langle \xi - \eta \rangle^{|s|}.$$

Dans ce cas, on aura $\left| \langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi u} \right| \leq c \int \underbrace{\langle \xi - \eta \rangle^{|s|} |\hat{\varphi}(\xi - \eta)|}_{L^1} \underbrace{\langle \eta \rangle^s |\hat{u}(\eta)|}_{L^2} d\eta$

Bref, il faut montrer $(*)$: symétrie en (ξ, η), donc il suffit d'avoir
$\langle \xi \rangle \leq c \langle \eta \rangle \langle \xi - \eta \rangle$

$\nabla(\langle \omega \rangle) = \frac{1}{\langle \omega \rangle} \nabla \omega$: $|\nabla(\langle \omega \rangle)| \leq 1 \quad \forall \omega$.

Inégalité Taylor : $|\langle\xi\rangle - \langle\eta\rangle| \leq |\xi-\eta|$

$$\Rightarrow \langle\xi\rangle \leq \langle\eta\rangle + |\xi-\eta| \leq \langle\eta\rangle(1+|\xi-\eta|)$$

$$(1+|\xi-\eta|)^2 = 1+|\xi-\eta|^2+2|\xi-\eta| \underset{2ab\leq a^2+b^2}{\leq} 1+|\xi-\eta|^2+1+|\xi-\eta|^2$$

$$\Rightarrow (1+|\xi-\eta|) \leq \sqrt{2}\langle\xi-\eta\rangle$$

$$\text{et } \langle\xi\rangle \leq \sqrt{2}\langle\eta\rangle\langle\xi-\eta\rangle \blacksquare$$

<u>Prop</u> : $\forall s\in\mathbb{R}$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

<u>Dem</u> : exercice.

<u>Th (injection de Sobolev)</u> $k\in\mathbb{N}$, $s > d/2 + k$.

Si $u\in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall \alpha\in\mathbb{N}^d$, $|\alpha|\leq k$, $D^\alpha u\in C_b(\mathbb{R}^d)$, et $D^\alpha u(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe $C = C(s,\alpha,d)$ / $\forall u\in H^s(\mathbb{R}^d)$, $\|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^s}$.

<u>Dem</u> : * $\mathcal{S}\subset H^s$ dense et continue : il suffit de montrer l'inégalité sur $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}\ni u_n \to u$ dans H^s : si on sait

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{L^\infty} \leq C\|u_n-u_m\|_{H^s}$$

alors $D^\alpha u_n$ CVU : $D^\alpha u_n \to g_\alpha$, donc $D^\alpha u_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} g_\alpha$

Unicité limite $\mathcal{S}'$: $g_\alpha = D^\alpha u$ + passage à la limite dans l'inégalité.

$$* \; D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-d/2}\int \underbrace{\frac{\xi^\alpha}{\langle\xi\rangle^s}}_{L^2 \text{ ssi } |\alpha|-s<-d/2}\langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi)d\xi \quad (u\in\mathcal{S})$$

$\blacksquare$