IV. Méthode des caractéristiques

Approche valable dans le cas où la variable d'espace a <u>une</u> dimension

→ $x \in \mathbb{R}$

→ $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, si on se place dans un cadre radial : $u(t,x) = \underbrace{v(t,r)}_{1D}$.

Supposons $c \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x ; \mathbb{R})$ et considérons

$$\frac{dx}{dt} = c(t,x) \quad ; \quad x(0) = x_0 .$$

⇝ solution $x(t)$

Si u est régulière, on en déduit

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + c(t, x(t))\frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))$$

<u>Cl</u> : les solutions de $\partial_t u(t,x) + c(t,x)\partial_x u(t,x) = 0$ sont constantes le long des courbes $\{(t, x(t)) ; t \in I\}$.

<u>Déf</u> : $\{(t, x(t)) ; t \in I\}$ sont les (courbes) <u>caractéristiques</u>

Récip. : si $\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = 0$, alors $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ aux points où passe au moins une caractéristique.

<u>ex</u> : $c \in \mathbb{R}$ une constante. $\frac{dx}{dt} = c$: $x(t) = x_0 + ct$

$\{(t, x_0 + ct),\ t \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$: $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solution de $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ <u>ssi</u> $\frac{d}{dt} u(t, x_0 + ct) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$u(t, x_0 + ct) = u_0(x_0)$$

$y = x_0 + ct$: $u(t,y) = u_0(y - ct)$

Cl : $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ sol. $\partial_t u + c\partial_x u = 0$
ssi $\exists u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ / $u(t,x) = u_0(x-ct)$.

ex : $\partial_t u + c\partial_x u + f(t,x)u = 0$; $u_{|t=0} = u_0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

$$\frac{d}{dt} u(t, x_0+ct) + f(t, x_0+ct)\, u(t, x_0+ct) = 0$$

Posons $z(t) = u(t, x_0+ct)$; $a(t) = f(t, x_0+ct)$: x_0 fixé.
$\dot{z} = -a(t) z$
$\Rightarrow z(t) = z(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$, t_0 quelconque.

Retour à u : $u(t, x_0+ct) = u_0(x_0) e^{-\int_0^t f(s, x_0+cs)ds}$

$x = x_0+ct$: $u(t,x) = u_0(x-ct)\exp\left(-\int_0^t f(s, x-c(t-s))ds\right)$.

ex : $\partial_t u + c\partial_x u = F(t,x)$; $u_{|t=0} = u_0$: $u(t,x) = u_0(x-ct) + \int_0^t F(s, x-c(t-s))ds$

Formule de d'Alembert

Equation des ondes en 1D : $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$; $c>0$ vitesse de la lumière

Prop : $u \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$ solution ssi $\exists f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ /
$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$

Dem : $\Leftarrow$: facile.
$\Rightarrow$: supp. $u \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$ solution.
Remarquons $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x) = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$
Introduisons $u_+ = \partial_t u - c\partial_x u$; $u_- = \partial_t u + c\partial_x u$
On a donc : $(\partial_t + c\partial_x) u_+ = 0 = (\partial_t - c\partial_x) u_-$
D'après le premier exemple, $u_\pm = F_\pm(x \mp ct)$.

On a obtenu : $u_+ = (\partial_t - c\partial_x)u = F_+(x-ct)$

Méthode des caractéristiques encore : $a(t) = u(t, x-ct)$

$\dot{a}(t) = F_+(x-2ct)$

$$a(t) = a(0) + \int_0^t F_+(x-2cs)\,ds$$

$$u(t,x) = u_0(x+ct) + \int_0^t F_+(x+ct-2cs)\,ds$$

Changement de variable : $\tau = x+ct-2cs$

$$u(t,x) = u_0(x+ct) + \int_{x+ct}^{x-ct} F_+(\tau)\,\frac{d\tau}{-2c}$$

$$= u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} F_+(\tau)\,d\tau.$$

De même avec u_- :

$$u(t,x) = u_0(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} F_-(\tau)\,d\tau$$

On a donc $u(t,x) = u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} F_+(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} F_+(\tau)\,d\tau$

$$= u_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} F_-(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} F_-(\tau)\,d\tau$$

$\rightarrow$ bien de la forme $f(x-ct) + g(x+ct)$

<u>NB</u> : f et g déterminées à une constante près

$u_+ = -2cf'(x-ct) = F_+(x-ct)$: $f' = -\frac{1}{2c}F_+ = u_0' - \frac{1}{2c}F_-$

$g' = \frac{1}{2c}F_- = u_0' + \frac{1}{2c}F_+$.

Equation de Burgers : $u = u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \quad ; u(0,x) = u_0(x)$$

Ici, $c(t,x) = u(t,x)$ correspond à l'inconnue

Supposons $u \in C^\infty([0,T]_x \mathbb{R})$: $\frac{dx(t)}{dt} = u(t, x(t))$, $x(0) = x_0$.

si on connait $x(t)$: $\frac{d}{dt} u(t,x(t)) = \partial_t u + \frac{dx}{dt}\partial_x u = \partial_t u + u\partial_x u = 0$.

$\Rightarrow u(t, x(t)) = u_0(x_0)$.

Du coup, on sait résoudre l'équation caractéristique :

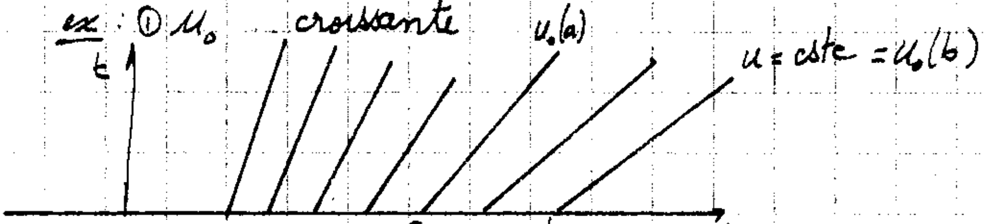
$$\frac{dx}{dt} = u_0(x_0) \ ; \ x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + t\, u_0(x_0)$$

et $\quad u(t, x + t u_0(x)) = u_0(x)$

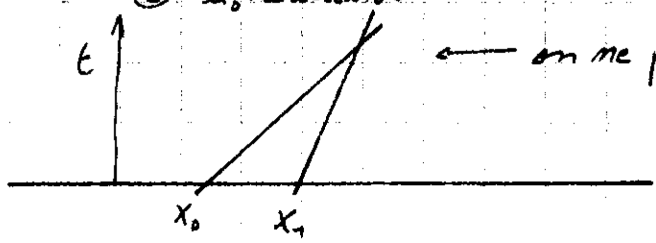
t fixée : $y = x + t\, u_0(x)$ fonction non linéaire de x, pas forcément inversible

ex : ① u_0 croissante



$\Rightarrow$ on peut inverser pour tout temps

② u_0 décroissante



⟵ on ne peut pas trouver de sol. C^∞ au-delà de ce temps (ni même C^1)

Th : supp. $u \in C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ est sol. de
$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \quad ; \quad u|_{t=0} = u_0$$
et u_0 n'est pas croissante. Alors, nécessairement
$$T \leq \inf\left\{ -\frac{b-a}{u_0(b)-u_0(a)} \; ; \; a<b \text{ et } u_0(a) > u_0(b) \right\}$$
$$= -\frac{1}{\inf\{u_0'(x) ; x\in\mathbb{R}\}}$$

Dem : . dernière égalité : $u_0(b) - u_0(a) = (b-a)u_0'(c)$, $a \leq c \leq b$

. preuve alternative : supp. $u \in C^1([0,T]\times\mathbb{R})$
$$0 = \partial_x(\partial_t u + u\partial_x u) = \partial_t\partial_x u + (\partial_x u)^2 + u\partial_x^2 u.$$

$\mathcal{D}'$

$$v = \partial_x u \; : \; \partial_t v + v^2 + u\partial_x v = 0$$

$x_0 \in \mathbb{R}$: $y(t) := v(t, x_0 + t u_0(x_0))$

$$\dot{y} = \partial_t v + u_0(x_0)\partial_x v = \partial_t v + u(t, x_0 + tu_0(x_0))\partial_x v$$
$$= -v^2(t, x_0 + tu_0(x_0)) = -y^2(t).$$
$y(0) = u_0'(x_0)$
$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{u_0'(x_0)}{1+tu_0'(x_0)} \quad : \text{explose } t \to -\frac{1}{u_0'(x_0)} \text{ (si...)}$$

Th : Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, avec $\inf_{\mathbb{R}} u_0'$ fini. Alors avec
. $T = \infty$ si $\inf u_0' \geq 0$,
. $T = -\frac{1}{\inf u_0'}$ sinon,

il existe une unique solution $u \in C^1([0,T[\times\mathbb{R})$ au pb $\partial_t u + u\partial_x u = 0$; $u|_{t=0} = u_0$
Elle est donnée implicitement par : $u(t,x) - u_0(x - tu(t,x)) = 0$
Si $u_0 \in C^k$, $k \geq 2$ près de x_0, alors u est C^k près du segment
$$\{(t, x_0 + t u_0(x_0)) ; 0 \leq t < T\}$$

(TFI :
$F(t,x,u) = u - u_0(x-tu)$
$\frac{\partial F}{\partial u} > 0 \quad 0 \leq t < T$)