III Equations différentielles ordinaires

On considère une EDO d'ordre $m \geq 1$:

$$\frac{d^m u(t)}{dt^m} = G\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}\right) \qquad (1)$$

ex : $\frac{du}{dt} = a u$ (évolution de la radioactivité si $a<0$; explosion Malthusienne de la population si $a>0$)

Loi fondamentale de la dynamique : $m u'' = G(t, u(t), u'(t))$
frottement par exemple

Problème de Cauchy : étant donné $u_0, u_1, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{R}$, trouver une sol. à l'EDO (1) satisfaisant les conditions initiales

$$\frac{d^j u}{dt^j}(0) = u_j \quad , \; j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Rq (calcul de Cauchy) : on connaît alors le dvpt de Taylor de u en 0, au moins si $G \in C^\infty$.

On se ramène au cas d'EDO d'ordre 1 en augmentant le nombre d'inconnues :
$V(t) = \left(u(t), \frac{du(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}\right)$.

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{dV(t)}{dt} = F(t, V(t)),$$

où $F(t, V_0, V_1, \dots, V_{m-1}) = \left(t, V_0, V_1, \dots, V_{m-1}, G(t, V_0, \dots, V_{m-1})\right)$

Cl : on étudie par la suite uniquement des EDO d'ordre 1 :

$$\frac{du(t)}{dt} = F(t, u(t)) \quad ; \quad u(0) = u_0 .$$

<u>Rq</u> : comme suggéré par la réduction à l'ordre 1, on ne se contente pas de $v(t) \in \mathbb{R}$: $v(t) \in E$, espace vectoriel normé complet (Banach)

On supposera $F : \mathbb{R} \times E \to E$ continue.

Th (Peano) : supposons $F : \mathbb{R} \times E \to E$ continue, $u_0 \in E$. Alors il existe $T > 0$ et une solution $u \in C^1([0,T]; E)$ de

$$\frac{du(t)}{dt} = F(t, u(t)) \quad ; u(0) = u_0$$

On va plutôt travailler avec des fonctions lipschitziennes, et des EDO autonomes ($F = F(u(t))$ seulement) <u>pour simplifier</u>

<u>Déf</u> : soit f continue sur $(E, \|\cdot\|)$. f est lipschitzienne si $\exists C > 0$, $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|$

La plus petite constante C telle que l'inégalité ci-dessus ait lieu (pour tous $x, y \in E$) est appelée constante de Lipschitz de f.

<u>ex</u> : $f \in C^1$, de dérivée bornée sur E ; $f(x) = |x|$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

<u>Lemme</u> : soit (X, d) un espace métrique complet (non vide).
Soit $\phi : X \to X$ strictement contractante :
$\exists \ c < 1 \ / \ d(\phi(x), \phi(y)) \leq c \, d(x,y) \quad \forall x, y \in X$.

Alors il existe un unique $u \in X \ / \ u = \phi(u)$

De plus si $u_0 \in X$ est un élément quelconque de X, alors la suite u_j définie par $u_{j+1} = \phi(u_j)$, converge vers u

Enfin, pour tout $v \in X$,

$$d(u, v) \leq \frac{1}{1-c} d(v, \phi(v))$$

Dem : soit $u_0 \in X$ (X non vide)

Pour $j \geq 0$, on définit par récurrence $u_{j+1} = \phi(u_j) \in X$.

Soit $j \geq 1$: par hypothèse sur ϕ,

$$d(u_{j+1}, u_j) \leq c\, d(u_j; u_{j-1}).$$

Par récurrence, on montre : $d(u_{j+1}, u_j) \leq c^j\, d(u_1, u_0)$. $(*)$

La série $\sum_{j \geq 0} d(u_{j+1}, u_j)$ converge donc (terme général contrôlé par le terme général d'une série géométrique cv)

$\Rightarrow$ la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy

$\Rightarrow u_j \xrightarrow[j \to \infty]{} u \in X$.

Passage à la limite dans $(*)$:
$$\begin{aligned} d(\phi(u), u) &\leq d(\phi(u), \phi(u_{j+1})) \\ &\quad + d(\phi(u_{j+1}), \phi(u_j)) \\ &\quad + d(\phi(u_j), u) \\ &\leq c\, d(u, u_{j+1}) + c^j d(u_1, u_0) + c\, d(u_{j+1}, u) \\ &\xrightarrow[j \infty]{} 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow u = \phi(u)$: existence.

Unicité : si $u = \phi(u)$ et $\tilde{u} = \phi(\tilde{u})$:
$$d(u, \tilde{u}) = d(\phi(u), \phi(\tilde{u})) \leq c\, d(u, \tilde{u})$$
si on avait $d(u, \tilde{u}) \neq 0$, alors $c \geq 1$: contradiction.

Enfin :
$$\begin{aligned} d(u,v) = d(\phi(u), v) &\leq d(v, \phi(v)) + d(\phi(v), \phi(u)) \\ &\leq d(v, \phi(v)) + c\, d(u, v) \end{aligned}$$
$\Rightarrow (1-c)\, d(u,v) \leq d(v, \phi(v))$ ∎

Th (Picard) Soit $F \in C(E,E)$ lipschitzienne, de constante L.
Soit $0 < T < 1/L$. Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe une unique solution $u \in C^1([-T,T];E)$ au problème de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = F(u(t)) \quad ; u(0) = u_0$$

Dem : Soit $u_0 \in E$. On définit $\phi : C([-T,T];E) \longrightarrow C([-T,T];E)$ par

$$\phi(u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\,ds.$$

Soit $t \in [-T,T]$:

$$\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| = \left\|\int_0^t \big(F(u(s)) - F(v(s))\big)ds\right\|$$

$$\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|\,ds$$

$$\leq L \int_0^t \|u(s)-v(s)\|ds$$

$$\leq L\, t \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)-v(s)\| \leq L\,T\, \|u-v\|_{C([-T,T];E)}$$

sup pour $t \in [-T,T]$: $\|\phi(u)-\phi(v)\|_{C([-T,T],E)} \leq L\,T\,\|u-v\|_{C([-T,T],E)}$

Lemme $\Rightarrow \exists!\, u \in C([-T,T];E) \;/\; u = \phi(u)$.

$$u(t) = \underbrace{u_0 + \int_0^t F(u(s))ds}_{C^1([-T,T];E)} \quad \Rightarrow u \in C^1([-T,T];E) \;\blacksquare$$

Rq : suite du lemme s'écrit ici : $u^{(0)}(t) = u_0$,

$$u^{(j+1)}(t) = u_0 + \int_0^t F(u^{(j)}(s))ds \quad : \quad \underline{\text{itérées de Picard}}$$

$$\in C([-T,T];E).$$

Ex : * $\dot u = a(t)u(t)$; $u(0)=u_0$

$$u(t) = u_0\, e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

* $\dot u = u^2$; $u(0)=u_0$: $\frac{du}{u^2} = dt$: $\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{u_0} = t$

$$u(t) = \frac{u_0}{1+u_0 t}$$: u singulière $t \to -1/u_0$.

* $\dot u = i\, f(|u|^2)u$; $u(0)=u_0 \in \mathbb{C}$; $u \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Astuce : $\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\bar u\, \dot u = 2\,\mathrm{Re}\, i\, f(|u|^2)|u|^2 = 0$

$\Rightarrow \dot u = i\, f(|u_0|^2)u$ et $u(t) = u_0\, e^{it f(|u_0|^2)}$.

* Résultat faux si F n'est pas lipschitzienne : $p>1$,

$$\dot u(t) = p\, |u(t)|^{\frac{p-1}{p}} \;;\; u(0)=0$$

$u(t)=0$ sol. ; mais aussi $\tilde u(t) = \max(0,t)^p$

<u>Corollaire</u> : Soit $F \in C(E;E)$ localement lipschitzienne :
$\forall R>0, \exists C_R \,\forall x, y$, $\|x\|, \|y\| \leq R$, $\|F(x)-F(y)\| \leq C_R \|x-y\|$.
Soit $u_0 \in E$. Alors il existe un intervalle maximal d'existence $I =]T_-, T_+[$, $-\infty \leq T_- < 0 < T_+ \leq +\infty$ et une unique sol. $u \in C^1(I;E)$ au problème $\frac{du}{dt} = F(u(t))$; $u(0)=u_0$

De plus, si T_+ est fini, alors $\|u(t)\| \xrightarrow[t \to T_+,\, t<]{} +\infty$
" T_- " " $\|u(t)\| \xrightarrow[t \to T_-,\, t>]{} +\infty$

Dem : soit I la réunion de tous les intervalles ouverts contenant $t=0$ pour lesquels on a une solution. Par le th. , I contient un voisinage de 0. I ouvert connexe : clair.
$\Rightarrow I =]T_-, T_+[$, $-\infty \leq T_- < 0 < T_+ \leq +\infty$.

Supposons T_+ fini, et qu'il existe $t_n \to T_+$ / $(\|u(t_n)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée : $\|u(t_n)\| \leq R$.
$\Rightarrow F$ lipschitzienne : Th $\Rightarrow$ on prolonge au-delà de T_+
$\Rightarrow$ contredit le caractère maximal de T_+. ∎

Lemme(s) de Gronwall

Dériver des inégalités = interdit
(ex : $\cos t \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
mais on n'a pas $-\sin t \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$!!)
Par contre, on peut intégrer

Th : soit $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_+$ continue positive. On suppose
$\forall t \in [t_0, t_1]$, $\quad \frac{\partial u}{\partial t} \leq A(t)u(t) + B(t)$

où $A, B : [t_0, t_1]$ continues. Alors
$\forall t \in [t_0, t_1]$, $\quad u(t) \leq u(t_0)\, e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} + \int_{t_0}^t B(s) e^{\int_s^t A(\tau)d\tau} ds$

Dem : $v(t) = u(t) e^{-\int_{t_0}^t A(s)ds}$ est tq $\partial_t v(t) \leq B(t) e^{-\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau}$
$\Rightarrow v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t B(s) e^{-\int_{t_0}^s A} ds$

Rq : il suffit d'avoir l'inégalité p.p. $t \in [t_0, t_1]$ et u absolument continue

Th (inégalité de Gronwall, forme intégrale) Soit $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_+$ continue positive /

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} \left(a(s)\, u(s) + b(s)\right) ds + C$$

avec $a, b : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_+$ continues. Alors

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ u(t) \leqslant C e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{\int_s^t a(\tau)\,d\tau}\, ds$$

Dem: $w(t) = \int_{t_0}^{t} (a(s) u(s) + b(s))\, ds + C \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}_+)$

$$\dot{w}(t) = a(t) u(t) + b(t) \leqslant a(t) w(t) + b(t)$$

Th. précédent : $w(t) \leqslant \underbrace{w(t_0)}_{C} e^{\int_{t_0}^{t} a} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_s^t a}\, ds$

et $u(t) \leqslant w(t)$ encore une fois.

Rq : résultats optimaux, car il peut y avoir égalité.

Bootstrap

Th : Soit $f \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$. Supposons que $\forall t \in [0, T]$

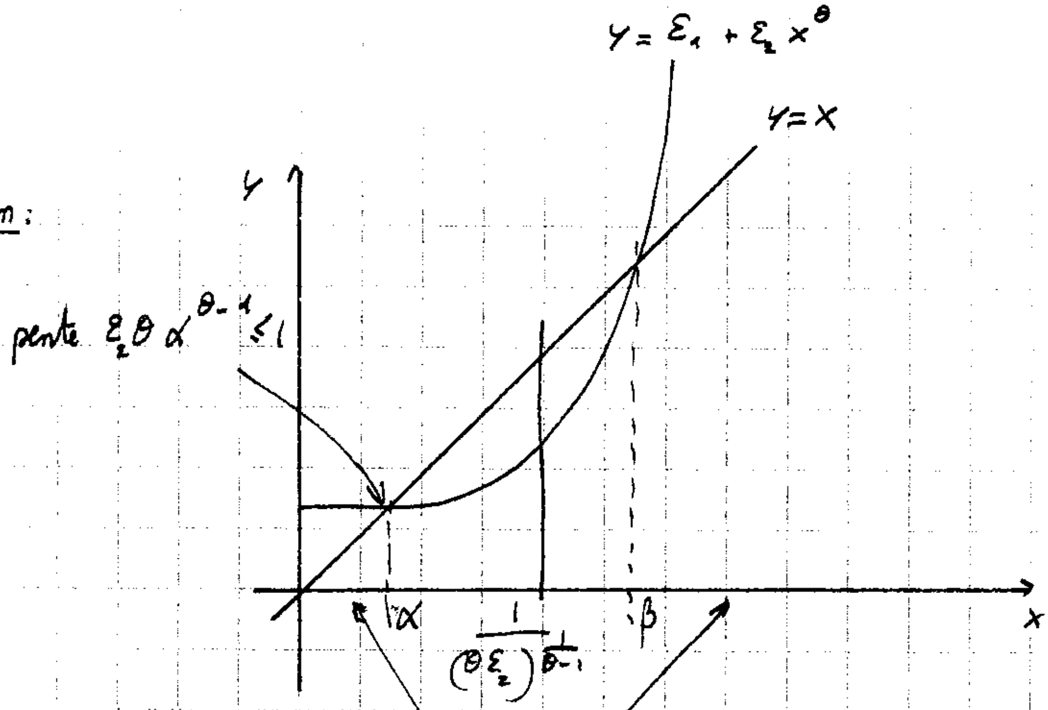
$$f(t) \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 f(t)^{\theta}$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ et $\theta > 1$ vérifiant :

$$\varepsilon_1 < \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \frac{1}{(\theta \varepsilon_2)^{1/\theta - 1}} \quad ; \quad f(0) \leqslant \frac{1}{(\theta \varepsilon_2)^{\frac{1}{\theta - 1}}}$$

Alors $\forall t \in [0, T]$, $f(t) \leqslant \dfrac{\theta}{\theta - 1} \varepsilon_1$

Dem :



hyp. = on est dans une de ces deux composantes connexes.

Continuité $\Rightarrow$ on reste dans la même composante.

on vérifie : 1) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left(\frac{1}{\theta\varepsilon_2}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \leq \frac{1}{(\theta\varepsilon_2)^{\frac{1}{\theta-1}}}$ (argument de pente

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\theta\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}$ entre les deux c.c.

2) or $f(0) \leq \frac{1}{(\theta\varepsilon_2)^{\frac{1}{\theta-1}}}$ $\Rightarrow$ f est forcément dans le c.c. de gauche.

Dans la c.c. :

$$f(t) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 f(t)^\theta \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 f(t) \alpha^{\theta-1}$$

$$\leq \varepsilon_1 + \frac{1}{\theta} f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) \leq \frac{\theta}{\theta-1} \varepsilon_1 \ \blacksquare$$