II Nature des équations

 # Retour sur l'exemple $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ (1)

équation d'évolution en temps : on se donne une condition initiale, $u(0,x) = u_0(x)$ (2)

1^er cas : $c \in \mathbb{R}$

on vérifie que $u(t,x) = u_0(x-ct)$ est solution, pourvu que $u \in C^1(\mathbb{R})$.

Th : supposons $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$ au système (1)-(2). Cette solution est donnée par la formule $u(t,x) = u_0(x-ct)$.
Si de plus $u_0 \in C^k(\mathbb{R})$, $k>1$, alors $u \in C^k(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$

Dem : seul point à vérifier = unicité.
Soit $\tilde{u}(t,x)$ une sol. de (1)-(2), $\tilde{u} \in C^1(\mathbb{R}^2)$
Posons $v(t,x) = \tilde{u}(t, x+ct)$
Alors $\partial_t v(t,x) = \partial_t \tilde{u}(t,x+ct) + c\,\partial_x \tilde{u}(t,x+ct)$
$= 0$
$\Rightarrow v(t,x) = v(0,x) \quad \forall t, x \in \mathbb{R}$
$v(0,x) = \tilde{u}(0,x) = u_0(x)$
Cl : Nécessairement, $\tilde{u}(t,x) = u_0(x-ct)$: unicité ■

2^e cas : $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On suppose $c = -i$ pour simplifier la discussion.

(1) devient $\dfrac{\partial u}{\partial t} = i\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (3)

Identifions $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ avec $\mathbb{C}$, via $z = x + it$
(3) = équation de Cauchy-Riemann : $f(x+it) := u(t,x)$

Ainsi, u est solution de (3) <u>SSi</u> f est une fonction holomorphe de z.

En particulier, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

A propos des conditions initiales : on a forcément
$u_0(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: u_0 est somme de son développement de Taylor.

<u>Déf</u> : si g est donnée par une série entière convergente, $g : \underline{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ est analytique <u>réelle</u>.

<u>Ccl</u> : $u \in C^1(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$ solution de $\begin{cases} \partial_t u - i\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$

ssi u_0 est analytique réelle.

Ainsi, $u_0 \in C^\infty$ ne suffit pas !

<u>ex</u> : . $u_0 \in \mathbb{R}[X]$: analytique réelle.
$\mathbb{C}[X]$

. $u_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$: fonction C^∞, mais pas analytique

<u>Ccl</u> : . $c \in \mathbb{R}$: équation « gentille »
. $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: (1) n'a que des solutions analytiques réelles.
si u_0 n'est pas analytique : pas de solution (C^1).

* <u>Trois grandes familles</u>

selon la valeur de c ($c\in\mathbb{R}$ ou pas), la nature de l'équation (1) change : $c\in\mathbb{R}$ → équation hyperbolique

$c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ → équation elliptique

Généralisation : $\frac{1}{i}\partial_t u + P(D_x)u = 0$

$$D_x = \left(\frac{1}{i}\partial_{x_1}, \dots, \frac{1}{i}\partial_{x_d}\right), \quad P \text{ polynôme.}$$

Cherchons une solution sous la forme $u(t,x) = e^{it\omega t + ik.x}$ (onde plane) $\boxed{\omega\in\mathbb{R}}$ ($k\in\mathbb{R}^d$)

Eq. devient : $\omega + P(k_1, \dots, k_d) = 0$.

⇝ solutions $k = k(\omega)$ (variété algébrique)

. si les solutions sont réelles : éq. hyperbolique.

. si la seule solution réelle (ω, k) de $\omega + P(k) = 0$: éq. elliptique.

Dans l'exemple : $P(k) = ck$

$c\in\mathbb{R}$: $0 = \omega + ck \Leftrightarrow k = -\frac{\omega}{c} \in\mathbb{R}$: hyp.

$c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$: $\omega + ck = 0$, $\omega, k\in\mathbb{R}$: $\mathrm{Im}(\quad) \Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow \omega = 0$.

Origine de la dénomination

Considérons $a\,\partial^2_{x_1x_2} + b\,\partial^2_{x_1x_2} + c\,\partial^2_{x_2x_2}$ + ordre inférieur ($X\in\mathbb{R}^2$)

on suppose $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Forme quadratique associée : $a\,\xi_1^2 + b\,\xi_1\xi_2 + c\,\xi_2^2 = q(\xi)$

. q définie positive (ou négative) : opérateur elliptique
($\{q(\xi) = 1\}$ = ellipse)

. q non dégénérée, signature $(1,1)$: op. hyperbolique
$\{q(\xi) = 1\}$ = hyperbole.

. q dégénérée : éq. "éventuellement" parabolique.

<u>Les principaux exemples</u>

* Elliptique : . problème de Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

. $-\Delta u + u = u^p$

. $-\Delta u + \frac{|x|^2}{2} u + \lambda |u|^{p-1} u = \omega u$ (BEC)

* Hyperbolique : * $(\partial_t^2 - \Delta) u = 0$

* $(\partial_t^2 - \Delta) u + m^2 u + u^p = 0$ $(m \geq 0)$

* Euler (compressible ou incompressible)

. Maxwell

* Parabolique : . $\partial u - \Delta u = 0$

. $\partial u - \Delta u = f(u)$

<u>Rq</u> : . Navier-Stokes : un peu d'hyperbolique, un peu de parabolique

. Schrödinger : hors catégorie. "Entre hyperbolique et parabolique"