

Equations aux dérivées partielles : étude théorique

I Exemples d'EDP

EDP linéaires

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$. En général, on considère $\Omega = \mathbb{R}^d$.

• $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$; $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{C}$

$d=1$: $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$: nature de l'équation différente selon que $c \in \mathbb{R}$ ou $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (discuté plus loin)

• $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ ($\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$) : équation des ondes

→ élongation d'une corde vibrante.

→ en électromagnétisme : évolution des champs électrique et magnétique dans le vide.

→ équation modèle en relativité générale (eq. d'Einstein)

• $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u + m^2 u = 0$: Klein-Gordon

• $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$: équation de la chaleur.

• $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta u = 0$: équation de Schrödinger (mécanique quantique)

$|u(t, x)|^2 =$ densité de probabilité de trouver la particule en x à l'instant t .

• $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta u = V u$; $V = V(x)$ potentiel extérieur.

ex: $V(x) = E \cdot x$ ou $\vec{g} \cdot x$: champ électrique ou gravité.

ex: $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$ = champ magnétique confinant.

EDP non linéaires

- $(\partial_t^2 - \Delta)u + |u|^{p-1}u = 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ (relativité, électromagnétisme...)
- $(\partial_t^2 - \Delta)u + m^2 u + |u|^{p-1}u = 0$
- $i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \beta |u|^2 u$: approximation ("parabolique") en électromagnétisme

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = \beta |u|^2 u, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{Maxwell après une première approximation})$$

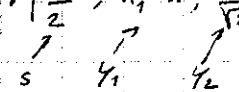
$x \in \mathbb{R}^2 \quad (d=2)$

On suppose que $u(t, x_1, x_2)$ se propage "approximativement" dans la direction des x_i croissants :

$$\partial_t u \approx -\partial_{x_1} u$$

$$\Rightarrow (\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2)u \approx (\partial_t - \partial_{x_1})(\partial_t + \partial_{x_1})u \approx -2\partial_{x_1}(\partial_t + \partial_{x_1})u$$

changement de variable : $u(t, x_1, x_2) = v\left(\frac{t}{2}, x_1 - t, \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)$



$$\begin{aligned} -2\partial_{x_1}(\partial_t + \partial_{x_1})u &= -2\partial_{y_1}\left(\frac{1}{2}\partial_s - \partial_{y_1} + \partial_{y_1}\right)v \\ &= -\partial_{y_1}\partial_s v \end{aligned}$$

$$\partial_{x_2}^2 u = \frac{1}{2}\partial_{y_2}^2 v$$

$$\Rightarrow -\partial_{y_1}\partial_s v - \frac{1}{2}\partial_{y_2}^2 v = \beta |v|^2 v$$

On cherche $v(s, y_1, y_2) = A(s, y_2)e^{ik y_1}$, $k \in \mathbb{R}$:

$$-ik\partial_s A - \frac{1}{2}\partial_{y_2}^2 A = \beta |A|^2 A \quad : \text{NLS 1D.}$$

• $i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \frac{1 \times 1^2}{2} u + \lambda |u|^2 u$; Condensation de Bose-Einstein.

• mécanique des fluides : $\vec{v} : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
vitesse du fluide

• Euler incompressible : $\text{div } \vec{v} := \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 + \partial_{x_3} v_3 = 0$
 $\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0$

avec $(\vec{v} \cdot \nabla) f = \sum_{j=1}^3 v_j \partial_{x_j} f$

$p : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{R}$ pression (inconnue)

• Euler compressible : ρ densité : $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$

ex :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0 \end{cases} \quad p = p(\rho)$$

• Navier-Stokes incompressible

$$\begin{cases} \text{div } \vec{v} = 0 \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = \nu \Delta \vec{v} \end{cases}$$

$\nu = \text{viscosité}$

Ed: de nombreuses EDP (linéaires ou NL) sont issues de la physique.

Autres domaines où les EDP sont présentes :

- chimie ;
- biologie ;
- économie ;
- géométrie ;
- (...)