Equations aux dérivées partielles : étude théorique

I. Exemples d'EDP

EDP linéaires

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$. En général, on considérera $\Omega = \mathbb{R}^d$.

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$; $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x \longrightarrow \mathbb{C}$.

$d = 1$: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$: nature de l'équation différente selon que $c \in \mathbb{R}$ ou $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (discuté plus loin)

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ $\left(\Delta = \sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)$: équation des ondes

  → élongation d'une corde vibrante.
  → en électromagnétisme : évolution des champs électrique et magnétique dans le vide.
  → équation modèle en relativité générale (éq. d'Einstein)

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u + m^2 u = 0$: Klein-Gordon
- $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$: équation de la chaleur.

- $i \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \Delta u = 0$: équation de Schrödinger (mécanique quantique)

  $|u(t,x)|^2$ = densité de probabilité de trouver la particule en x à l'instant t.

- $i \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \Delta u = V u$; $V = V(x)$ potentiel extérieur.

  ex : $V(x) = E \cdot x$ ou $\vec{g} \cdot x$: champ électrique ou gravité.
  ex : $V(x) = \dfrac{|x|^2}{2}$ = champ magnétique confinant.

<u>EDP non linéaires</u>

- $(\partial_t^2 - \Delta) u + |u|^{p-1} u = 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ (relativité, électromagnétisme...)

  $(\partial_t^2 - \Delta) u + m^2 u + |u|^{p-1} u = 0$
- $i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \beta |u|^2 u$: approximation ("parabolique") en électromagnétisme

$$(\partial_t^2 - \Delta) u = \beta |u|^2 u \quad , \beta \in \mathbb{R} \quad \text{(Maxwell après une première approximation)}$$
$$x \in \mathbb{R}^2 \quad (d = 2)$$

On suppose que $u(t, x_1, x_2)$ se propage "approximativement" dans la direction des x_1 croissants :

$$\partial_t u \approx - \partial_{x_1} u$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2) u \approx (\partial_t - \partial_{x_1})(\partial_t + \partial_{x_1}) u \approx -2 \partial_{x_1} (\partial_t + \partial_{x_1}) u$$

changement de variable : $u(t, x_1, x_2) = v\Big(\underbrace{\tfrac{t}{2}}_{s}, \underbrace{x_1 - t}_{y_1}, \underbrace{\tfrac{x_2}{\sqrt{2}}}_{y_2}\Big)$

$$-2 \partial_{x_1} (\partial_t + \partial_{x_1}) u = -2 \partial_{y_1} \left(\frac{1}{2} \partial_s - \partial_{y_1} + \partial_{y_1} \right) v$$

$$= - \partial_{y_1} \partial_s v$$

$$\partial_{x_2}^2 u = \frac{1}{2} \partial_{y_2}^2 v$$

$$\rightsquigarrow \quad - \partial_{y_1} \partial_s v - \frac{1}{2} \partial_{y_2}^2 v = \beta |v|^2 v$$

On cherche $v(s, y_1, y_2) = A(s, y_2) e^{i k y_1}$, $k \in \mathbb{R}$:

$$-ik \partial_s A - \frac{1}{2} \partial_{y_2}^2 A = \beta |A|^2 A \quad : \text{NLS 1D.}$$

- $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \frac{|x|^2}{2}u + \lambda|u|^2 u$: Condensation de Bose-Einstein.

- mécanique des fluides : $\vec{v} : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{v} = (V_1, V_2, V_3)$
vitesse du fluide
  - Euler incompressible : $\operatorname{div} \vec{v} := \partial_{x_1} V_1 + \partial_{x_2} V_2 + \partial_{x_3} V_3 = 0$
$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \nabla p = 0$$

avec $(\vec{v}\cdot\nabla) f = \sum_{j=1}^{3} V_j \partial_{x_j} f$

$$p : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \to \mathbb{R} \quad \text{pression (inconnue)}$$

  - Euler compressible : ρ densité : $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x \to \mathbb{R}_+$

ex :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \nabla p = 0 \end{cases} \qquad p = p(\rho)$$

  - Navier-Stokes incompressible

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \nabla p = \nu \Delta \vec{v} \end{cases}$$

ν = viscosité.

<u>Cl</u> : de nombreuses EDP (linéaires ou NL) sont issues de la physique.

Autres domaines où les EDP sont présentes :

- chimie ;
- biologie ;
- économie ;
- géométrie ;
- (...)