

Equations aux dérivées partielles : étude théorique

Exemples d'EDP

EDP linéaires

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$. En général, on considérera $\Omega = \mathbb{R}^d$.

• $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$; $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{C}$.

$d=1$: $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$: nature de l'équation différente selon que $c \in \mathbb{R}$ ou $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (discuté plus loin)

• $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ ($\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$) : équation des ondes

→ elongation d'une corde vibrante.

→ en électromagnétisme : évolution des champs électrique et magnétique dans le vide.

→ équation modèle en relativité générale (eq. d'Einstein)

• $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u + m^2 u = 0$: Klein-Gordon

• $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$: équation de la chaleur.

• $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta u = 0$: équation de Schrödinger (mécanique quantique)

$|u(t, x)|^2 =$ densité de probabilité de trouver la particule en x à l'instant t .

• $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta u = V u$; $V = V(x)$ potentiel extérieur.

ex : $V(x) = E \cdot x$ ou $\vec{g} \cdot x$: champ électrique ou gravité

ex : $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$ = champ magnétique confinant.

EDP non linéaires

- $(\partial_t^2 - \Delta)u + |u|^{p-1}u = 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ (relativité, électromagnétisme...)
- $(\partial_t^2 - \Delta)u + m^2 u + |u|^{p-1}u = 0$
- $i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = |u|^2 u$: approximation ("parabolique") en électromagnétisme

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = \beta |u|^2 u, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{Maxwell après une première approximation})$$

$x \in \mathbb{R}^2 \quad (d=2)$

On suppose que $u(t, x_1, x_2)$ se propage "approximativement" dans la direction des x_1 croissantes :

$$\partial_t u \approx -\partial_{x_1} u$$

$$\Rightarrow (\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2)u \approx (\partial_t - \partial_{x_1})(\partial_t + \partial_{x_1})u \approx -2\partial_{x_1}(\partial_t + \partial_{x_1})u$$

changement de variable : $u(t, x_1, x_2) = v\left(\underset{s}{\frac{t}{2}}, \underset{y_1}{x_1 - t}, \underset{y_2}{\frac{x_2}{\sqrt{2}}}\right)$

$$-2\partial_{x_1}(\partial_t + \partial_{x_1})u = -2\partial_{y_1}\left(\frac{1}{2}\partial_s - \partial_{y_1} + \partial_{y_1}\right)v$$

$$= -\partial_{y_1}\partial_s v$$

$$\partial_{x_2}^2 u = \frac{1}{2} \partial_{y_2}^2 v$$

$$\Rightarrow -\partial_{y_1}\partial_s v - \frac{1}{2} \partial_{y_2}^2 v = \beta |v|^2 v$$

On cherche $v(s, y_1, y_2) = A(s, y_2) e^{ik y_1}$, $k \in \mathbb{R}$:

$$-ik \partial_s A - \frac{1}{2} \partial_{y_2}^2 A = \beta |A|^2 A \quad : \text{NLS 1D.}$$

• $i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \frac{1 \times |u|^2}{2} u + \lambda |u|^2 u$: Condensation de Bose-Einstein.

• mécanique des fluides : $\vec{v} : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
vitesse du fluide

• Euler incompressible : $\operatorname{div} \vec{v} = \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 + \partial_{x_3} v_3 = 0$
 $\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0$

avec $(\vec{v} \cdot \nabla) f = \sum_{j=1}^3 v_j \partial_{x_j} f$

$p : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{R}$ pression (inconnue)

• Euler compressible : ρ densité : $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$

ex :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0 \end{cases} \quad p = p(\rho)$$

• Navier-Stokes incompressible

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = \nu \Delta \vec{v} \end{cases}$$

ν = viscosité

Cl : de nombreuses EDP (linéaires ou NL) sont issues de la physique.

Autres domaines où les EDP sont présentes :

- chimie ;
- biologie ;
- économie ;
- géométrie ;
- (...)

II Nature des équations

* Retour sur l'exemple $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$

équation d'évolution en temps : on se donne une condition initiale,
 $u(0, x) = u_0(x) \quad (2)$

1^{er} cas : $c \in \mathbb{R}$

on vérifie que $u(t, x) = u_0(x - ct)$ est solution, pourvu
que $u \in C^1(\mathbb{R})$.

Th : supposons $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Il existe une unique
solution $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ au système (1)-(2). Cette solution est
donnée par la formule $u(t, x) = u_0(x - ct)$.
Si de plus $u_0 \in C^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$, alors $u \in C^k(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$

Dém : seul point à vérifier = unicité.

soit $\tilde{u}(t, x)$ une sol. de (1)-(2), $\tilde{u} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Prenons $v(t, x) = \tilde{u}(t, x + ct)$

$$\text{Alors } \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x + ct) + c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x + ct) \\ = 0$$

$$\Rightarrow v(t, x) = v(0, x) \quad \forall t, x \in \mathbb{R}$$

$$v(0, x) = \tilde{u}(0, x) = u_0(x)$$

Cl : Nécessairement, $\tilde{u}(t, x) = u_0(x - ct)$: unicité ■

2^e cas : $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ - On suppose $c = -i$ pour simplifier la discussion.

$$(1) \text{ devient } \frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

Identifions $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ avec $\mathbb{C}$, via $z = x + it$

(3) = équation de Cauchy-Riemann : $f(x + it) := u(t, x)$

Ainsi, u est solution de (3) ssi f est une fonction holomorphe de z .

En particulier, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

A propos des conditions initiales : on a forcément

$$u_0(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : u_0 \text{ est somme de son développement de Taylor.}$$

Def: si g est donnée par une série entière convergente,
 $g: \underline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique réelle.

Col: $u \in C^1(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$ solution de $\begin{cases} \partial_t u - i \partial_x u = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$
ssi u_0 est analytique réelle.

Ainsi, $u_0 \in C^\infty$ ne suffit pas!

ex: $u_0 \in \begin{matrix} \mathbb{R}[X] \\ \mathbb{C}[X] \end{matrix}$: analytique réelle.

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases} : \text{fonction } C^\infty, \text{ mais pas analytique}$$

Col: $c \in \mathbb{R}$: équation « gentille »

$c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: (1) n'a que des solutions analytiques réelles.
si u_0 n'est pas analytique : pas de solution (C^1).

* Trois grandes familles

selon la valeur de c ($c \in \mathbb{R}$ ou pas), la nature de l'équation (1) change :

$c \in \mathbb{R} \rightarrow$ équation hyperbolique
 $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow$ équation elliptique

Généralisation: $\frac{1}{i} \partial_t u + P(D_x) u = 0$

$D_x = \left(\frac{1}{i} \partial_{x_1}, \dots, \frac{1}{i} \partial_{x_d} \right)$, P polynôme.

Cherchons une solution sous la forme $u(t, x) = e^{i\omega t + i k \cdot x}$
 (onde plane) $\omega \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}^d$)

Eq. devient: $\omega + P(k_1, \dots, k_d) = 0$.

$\rightarrow$ solutions $k = k(\omega)$ (variété algébrique)

si les solutions sont réelles: éq. hyperbolique.

si la seule solution réelle (ω, k) de $\omega + P(k) = 0$:
 éq. elliptique.

Dans l'exemple: $P(k) = c k$

$c \in \mathbb{R}: 0 = \omega + c k \Leftrightarrow k = -\frac{\omega}{c} \in \mathbb{R}: \text{hyp.}$

$c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: \omega + c k = 0, \omega, k \in \mathbb{R}: \text{Im}(\quad) \Rightarrow k = 0$
 $\Rightarrow \omega = 0$.

Origine de la dénomination

considérons $a \partial_{x_1 x_1}^2 + b \partial_{x_1 x_2}^2 + c \partial_{x_2 x_2}^2 + \text{ordre inférieur } (x \in \mathbb{R}^2)$

on suppose $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Forme quadratique associée: $a \xi_1^2 + b \xi_1 \xi_2 + c \xi_2^2 = q(\xi)$

* q définie positive (ou négative) : opérateur elliptique
 $\{q(x) = 1\} = \text{ellipse}$

* q non dégénérée, signature $(1, 1)$: op. hyperbolique
 $\{q(x) = 1\} = \text{hyperbole}$

* q dégénérée : eq. "éventuellement" parabolique.

Les principaux exemples

* Elliptique : problème de Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= u^p \\ -\Delta u + \frac{|x|^2}{2} u + \lambda |u|^{p-1} u &= \omega u \quad (\text{BEC}) \end{aligned}$$

* Hyperbolique :
 * $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$
 * $(\partial_t^2 - \Delta)u + m^2 u + u^p = 0 \quad (m > 0)$
 * Euler (compressible ou incompressible)
 * Maxwell

* Parabolique :
 $\partial_t u - \Delta u = 0$
 $\partial_t u - \Delta u = f(u)$

Rq : Navier-Stokes : un peu d'hyperbolique, un peu de parabolique

* Schrödinger : hors catégorie. "Entre hyperbolique et parabolique"

III Equations différentielles ordinaires

On considère une EDO d'ordre $m \geq 1$:

$$(1) \quad \frac{d^m u(t)}{dt^m} = G\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}}\right)$$

ex: $\frac{du}{dt} = a u$ (évolution de la radioactivité si $a < 0$; explosion Malthusienne de la population si $a > 0$)

Loi fondamentale de la dynamique: $m u'' = G(t, u(t), u'(t))$
frottement, par exemple

Problème de Cauchy: étant donné $u_0, u_1, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{R}$, trouver une sol.

à l'EDO (1) satisfaisant les conditions initiales

$$\frac{d^j u}{dt^j}(0) = u_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Rq (calcul de Cauchy): on connaît alors le dével de Taylor de u en 0, au moins si $G \in C^\infty$.

On se ramène au cas d'EDO d'ordre 1 en augmentant le nombre d'inconnues:

$$v(t) = \left(u(t), \frac{du(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}}\right).$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dv(t)}{dt} = F(t, v(t)),$$

$$\text{où } F(t, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) = \left(v_1, \dots, v_{m-1}, G(t, v_0, \dots, v_{m-1})\right)$$

Id: on étudie par la suite uniquement des EDO d'ordre 1:

$$\frac{du(t)}{dt} = F(t, u(t)) \quad ; \quad u(0) = u_0.$$

Rq: comme suggéré par la réduction à l'ordre 1, on ne se contente pas de $v(t) \in \mathbb{R}$: $v(t) \in E$, espace vectoriel normé complet (Banach)

On suppose $F: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ continue.

Th (Peano): supposons $F: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ continue $\sqrt{u \in E}$. Alors il existe $T > 0$ et une solution $u \in C^1([0, T]; E)$ de
$$\frac{du(t)}{dt} = F(t, u(t)) \quad ; \quad u(0) = u_0$$

On va plutôt travailler avec des fonctions lipschitziennes, et des EDO autonomes ($F = F(u(t))$ seulement) pour simplifier

Déf: soit f continue sur $(E, \|\cdot\|)$. f est lipschitzienne si $\exists C > 0$
 $\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|$

La plus petite constante C telle que l'inégalité ci-dessus ait lieu (pour tous $x, y \in E$) est appelée constante de Lipschitz de f .

ex: $f \in C^1$, de dérivée bornée sur E ; $f(x) = |x|$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Lemme: soit (X, d) un espace métrique complet (non vide).

Soit $\phi: X \rightarrow X$ strictement contractante:

$$\exists c < 1 \quad / \quad d(\phi(x), \phi(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Alors il existe un unique $u \in X$ ($u = \phi(u)$)

De plus si $u_0 \in X$ est un élément quelconque de X , alors la suite u_j définie par $u_{j+1} = \phi(u_j)$, converge vers u

Enfin, pour tout $v \in X$,

$$d(u, v) \leq \frac{1}{1-c} d(v, \phi(v))$$



Dém: soit $u_0 \in X$ (X non vide)

Pour $j \geq 0$, on définit par récurrence $u_{j+1} = \phi(u_j) \in X$.

Soit $j \geq 1$: par hypothèse sur ϕ ,

$$d(u_{j+1}, u_j) \leq c d(u_j, u_{j-1}).$$

Par récurrence, on montre: $d(u_{j+1}, u_j) \leq c^j d(u_1, u_0)$. (*)

La série $\sum_{j \geq 0} d(u_{j+1}, u_j)$ converge donc (terme général contrôlé par le terme général d'une série géométrique c.v.)
 $\Rightarrow$ la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy
 $\Rightarrow u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u \in X$.

$$\begin{aligned} \text{Passage à la limite dans (*) : } d(\phi(u), u) &\leq d(\phi(u), \phi(u_{j+1})) \\ &\quad + d(\phi(u_{j+1}), \phi(u_j)) \\ &\quad + d(\phi(u_j), u) \\ &\leq c d(u, u_{j+1}) + c^j d(u, u_0) + c d(u_{j+1}, u) \\ &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \phi(u) : \text{existence.}$$

Unicité: si $u = \phi(u)$ et $\tilde{u} = \phi(\tilde{u})$:

$$d(u, \tilde{u}) = d(\phi(u), \phi(\tilde{u})) \leq c d(u, \tilde{u})$$

si on avait $d(u, \tilde{u}) \neq 0$, alors $c \geq 1$: contradiction.

$$\begin{aligned} \text{Enfin: } d(u, v) &= d(\phi(u), v) \leq d(v, \phi(v)) + d(\phi(v), \phi(u)) \\ &\leq d(v, \phi(v)) + c d(u, v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1-c) d(u, v) \leq d(v, \phi(v)) \quad \blacksquare$$

Th (Picard) Soit $F \in C(E, E)$ lipschitzienne, de constante L .

Soit $0 < T < 1/L$. Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe une unique solution $u \in C^1([L-T, T]; E)$ au problème de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = F(u(t)) ; u(0) = u_0$$

Dém: Soit $u_0 \in E$. On définit $\phi : C([L-T, T]; E) \rightarrow C([L-T, T]; E)$ par

$$\phi(u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)) ds.$$

Soit $t \in [L-T, T]$:

$$\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| = \left\| \int_0^t (F(u(s)) - F(v(s))) ds \right\|$$

$$\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\| ds$$

$$\leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds$$

$$\leq L t \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s) - v(s)\| \leq L T \|u - v\|_{C([L-T, T]; E)}$$

$$\sup_{t \in [L-T, T]} \|\phi(u) - \phi(v)\| \leq L T \|u - v\|_{C([L-T, T]; E)}$$

$$\text{Lemme} \Rightarrow \exists ! u \in C([L-T, T]; E) / u = \phi(u).$$

$$u(t) = u_0 + \underbrace{\int_0^t F(u(s)) ds}_{C^1([L-T, T]; E)} \Rightarrow u \in C^1([L-T, T]; E) \blacksquare$$

Rq: suite du lemme s'écrit ici: $u^{(0)}(t) = u_0$,

$$u^{(j+1)}(t) = u_0 + \int_0^t F(u^{(j)}(s)) ds : \text{ itérés de Picard}$$

$$\in C([L-T, T]; E).$$

ex: * $u' = a(t)u(t)$; $u(0) = u_0$
 $u(t) = u_0 e^{\int_0^t a(s) ds}$

* $u' = u^2$; $u(0) = u_0$; $\frac{du}{u^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{u_0} = t$

$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t}$; u singulière $t \rightarrow 1/u_0$.

* $u' = i f(|u|^2)u$; $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}$; $u \in \mathbb{C}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Astuce: $\frac{d}{dt} |u|^2 = 2 \operatorname{Re} \bar{u} u' = 2 \operatorname{Re} i f(|u|^2) |u|^2 = 0$

$\Rightarrow u = i f(|u_0|^2) u$ et $u(t) = u_0 e^{it f(|u_0|^2)}$

* Résultat faux si F n'est pas lipschitzienne: $p > 1$,

$u'(t) = p |u(t)|^{\frac{p-1}{p}}$; $u(0) = 0$

$u(t) = 0$ sol.; mais aussi $\tilde{u}(t) = \max(0, t)^p$

Corollaire: Soit $F \in C(E; E)$ localement lipschitzienne:

$\forall R > 0, \exists C_R \forall x, y, \|x\|, \|y\| \leq R, \|F(x) - F(y)\| \leq C_R \|x - y\|$

Soit $u_0 \in E$. Alors il existe un intervalle maximal d'existence $I =]T_-, T_+[$, $-\infty \leq T_- < 0 < T_+ \leq +\infty$ et une unique sol.

$u \in C^1(I; E)$ au problème $\frac{du}{dt} = F(u(t))$; $u(0) = u_0$

De plus, si T_+ est fini, alors $\|u(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow T_+]{+} +\infty$
 " T_- " " $\|u(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow T_-]{+} +\infty$

Dem: soit I la réunion de tous les intervalles ouverts contenant $t=0$ pour lesquels on a une solution. Par le th., I contient un voisinage de 0. I ouvert connexe : clair.
 $\Rightarrow I =]T_-, T_+[$, $-\infty \leq T_- < 0 < T_+ \leq +\infty$.

Supposons T_+ fini, et qu'il existe $t_n \rightarrow T_+$ / $(\|u(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée: $\|u(t_n)\| \leq R$.
 $\Rightarrow F$ lipschitzienne : Th $\Rightarrow$ on prolonge au-delà de T_+
 $\Rightarrow$ contredit le caractère maximal de T_+ . ■

Lemme(s) de Gronwall

Dérivées des inégalités = interdit
 (ex: $\cos t \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 mais on n'a pas $-\sin t \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} !!$)
 Par contre, on peut intégrer

Th: soit $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue positive. On suppose
 $\forall t \in [t_0, t_1], \quad \frac{du}{dt} \leq A(t)u(t) + B(t)$

où $A, B : [t_0, t_1]$ continues. Alors
 $\forall t \in [t_0, t_1], \quad u(t) \leq u(t_0) e^{\int_{t_0}^t A(s) ds} + \int_{t_0}^t B(s) e^{\int_{t_0}^s A(\tau) d\tau} ds$

Dem: $v(t) = u(t) e^{-\int_{t_0}^t A(s) ds}$ est tq $\frac{dv}{dt} \leq B(t) e^{-\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}$
 $\Rightarrow v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t B(s) e^{-\int_{t_0}^s A} ds$

Rq: il suffit d'avoir l'inégalité p.p. $t \in [t_0, t_1]$ et u absolument continue

Th (inégalité de Gronwall, forme intégrale) Soit $u: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue positive /

$$u(t) \leq \int_{t_0}^t (a(s)u(s) + b(s)) ds + C$$

avec $a, b: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues - Alors
 $\forall t \in [t_0, t_1], u(t) \leq C e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a(\tau) d\tau} ds$

Dem: $w(t) = \int_{t_0}^t (a(s)u(s) + b(s)) ds + C \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}_+)$

$$\dot{w}(t) = a(t)u(t) + b(t) \leq a(t)w(t) + b(t)$$

Th. précédent : $w(t) \leq \underbrace{w(t_0)}_C e^{\int_{t_0}^t a} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a} ds$

et $u(t) \leq w(t)$ encore une fois.

Rq: résultats optimaux, car il peut y avoir égalité.

Bootstrap

Th: Soit $f \in C([0, T]; \mathbb{R}_+)$ - Supposons que $\forall t \in [0, T]$

$$(*) \quad f(t) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 f(t)^\theta$$

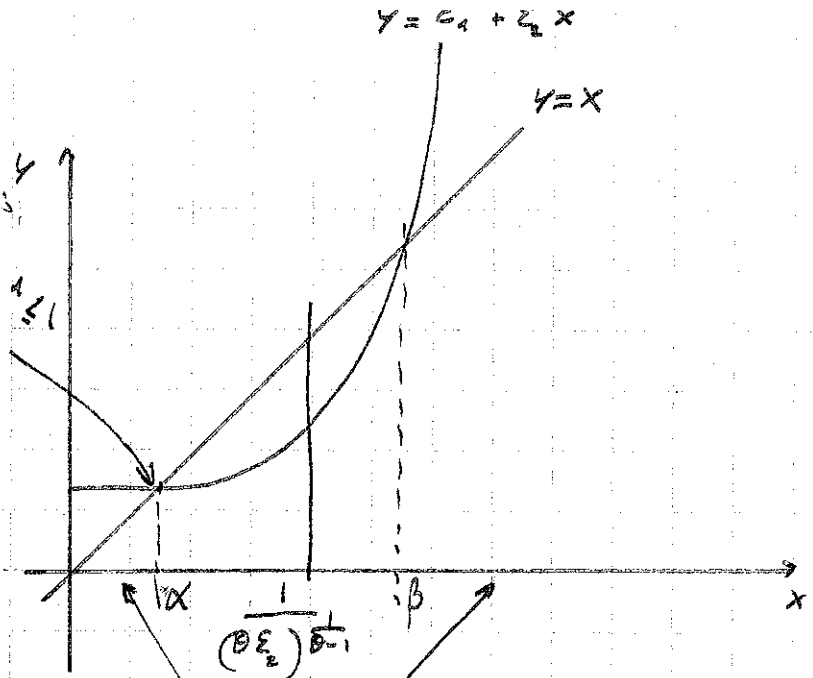
avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ et $\theta > 1$ vérifiant:

$$\varepsilon_1 < \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \frac{1}{(\theta \varepsilon_2)^{\frac{1}{\theta-1}}} \quad ; \quad f(0) < \frac{1}{(\theta \varepsilon_2)^{\frac{1}{\theta-1}}}$$

Alors $\forall t \in [0, T], f(t) \leq \frac{\theta}{\theta-1} \varepsilon_1$

Dém: Géométrique

penté $\frac{1}{\theta} \alpha^{\theta-1} \leq 1$



hyp. = on est dans une de ces deux composantes connexes.

Continuité $\Rightarrow$ on reste dans la même composante.

on vérifie : 1) $\epsilon_1 + \epsilon_2 \left(\frac{1}{\theta \epsilon_2} \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} < \frac{1}{(\theta \epsilon_2)^{\frac{1}{\theta-1}}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\theta \epsilon_2} \right)^{\frac{1}{\theta-1}}$ entre les deux c.c.

2) or $f(0) \leq \frac{1}{(\theta \epsilon_2)^{\frac{1}{\theta-1}}} \Rightarrow f$ est forcément dans la c.c. de gauche.

Dans la c.c. :

$$f(t) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 f(t)^{\theta} \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 f(t) \alpha^{\theta-1} \leq \epsilon_1 + \frac{1}{\theta} f(t)$$

$\Rightarrow f(t) \leq \frac{\theta}{\theta-1} \epsilon_1$ ■

Ou alors, analytique : $f(0) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 f(0)^{\theta-1}$ $f(0) \leq \epsilon_1 + \frac{1}{\theta} f(0)$
 par continuité, $f(t) \leq \frac{\theta}{\theta-1} \epsilon_1$ $t \in [0, t_0]$
 Tant que c'est vrai (...)

IV Méthode des caractéristiques

Approche valable dans le cas où la variable d'espace a une dimension

$$\rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow x \in \mathbb{R}^d, d \geq 2$, si on se place dans un cadre radial: $u(t, x) = v(t, r)$
↑
1D.

Supposons $c \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x; \mathbb{R})$ et considérons

$$\frac{dx}{dt} = c(t, x) ; x(0) = x_0.$$

$\leadsto$ solution $x(t)$

Si u est régulière, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, x(t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + c(t, x(t)) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) \end{aligned}$$

Cl: les solutions de $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + c(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0$
sont constantes le long des courbes $\{(t, x(t)); t \in I\}$.

Dé: $\{(t, x(t)); t \in I\}$ sont les (courbes) caractéristiques

Récip.: si $\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = 0$, alors $\frac{\partial}{\partial t} u + c \frac{\partial}{\partial x} u = 0$ aux points
où passe au moins une caractéristique.

ex: $c \in \mathbb{R}$ une constante. $\frac{dx}{dt} = c : x(t) = x_0 + ct$

$\{(t, x_0 + ct), t \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 : u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solution
de $\frac{\partial}{\partial t} u + c \frac{\partial}{\partial x} u = 0$ ssi $\frac{d}{dt} u(t, x_0 + ct) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$u(t, x_0 + ct) = u_0(x_0)$$

$$y = x_0 + ct : u(t, y) = u_0(y - ct)$$

Qd: $u \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R})$ sol. $\partial_t u + c \partial_x u = 0$
 ssi $\exists u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}) / u(t, x) = u_0(x - ct)$.

de: $\partial_t u + c \partial_x u + f(t, x)u = 0$; $u|_{t=0} = u_0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt} u(t, x_0 + ct) + f(t, x_0 + ct) u(t, x_0 + ct) = 0$$

Posons $z(t) = u(t, x_0 + ct)$; $a(t) = f(t, x_0 + ct)$: x_0 fixe

$$\dot{z} = -a(t)z$$

$$\Rightarrow z(t) = z(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} , t_0 \text{ quelconque.}$$

$$\text{Retour à } u: u(t, x_0 + ct) = u_0(x_0) e^{-\int_0^t f(s, x_0 + cs) ds}$$

$$x = x_0 + ct : u(t, x) = u_0(x - ct) \exp\left(-\int_0^t f(s, x - c(t-s)) ds\right)$$

(X)

ex: $\partial_t u + c \partial_x u = F(t, x)$; $u|_{t=0} = u_0$: $u(t, x) = u_0(x - ct) + \int_0^t F(s, x - c(t-s)) ds$

Formule de d'Alembert

Equation des ondes en 1D : $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$; $c > 0$ vitesse de la lum.

Prop: $u \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ solution ssi $\exists f, g \in C^\infty(\mathbb{R}) /$
 $u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$

Dém: $\Leftarrow$: facile.

$\Rightarrow$: sup. $u \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ solution.

Remarquons $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x) = (\partial_t + c \partial_x) \partial_t - c$

Introduisons $u_+ = \partial_t u - c \partial_x u$; $u_- = \partial_t u + c \partial_x u$

On a donc : $(\partial_t + c \partial_x) u_+ = 0 = (\partial_t - c \partial_x) u_-$

D'après le premier exemple, $u_\pm = F_\pm(x \mp ct)$.

On a obtenu : $u_+ = (\partial_t - c\partial_x)u = F_+(x-ct)$

Méthode des caractéristiques inverse : $a(t) = u(t, x-ct)$

$$\dot{a}(t) = F_+(x-2ct)$$

$$a(t) = a(0) + \int_0^t F_+(x-2cs) ds$$

$$u(t, x) = u_0(x+ct) + \int_0^t F_+(x+ct-2cs) ds$$

Changement de variable : $z = x+ct-2cs$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x+ct) + \int_{x+ct}^{x-ct} F_+(z) \frac{dz}{-2c} \\ &= u_0(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F_+(z) dz. \end{aligned}$$

De même avec u_- :

$$u(t, x) = u_0(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F_-(z) dz$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } u(t, x) &= u_0(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} F_+(z) dz - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} F_+(z) dz \\ &= u_0(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} F_-(z) dz + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} F_-(z) dz \end{aligned}$$

→ bien de la forme $f(x-ct) + g(x+ct)$

NB : f et g déterminées à une constante près

$$\begin{aligned} u_+ &= -2cf'(x-ct) = F_+(x-ct) : f' = -\frac{1}{2c} F_+ = u'_0 - \frac{1}{2c} F_- \\ g' &= \frac{1}{2c} F_- = u'_0 + \frac{1}{2c} F_+. \end{aligned}$$

Equation de Burgers : $u = u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad ; \quad u(0, x) = u_0(x)$$

ici, $c(t, x) = u(t, x)$ correspond à l'inconnue

Supposons $u \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$: $\frac{dx(t)}{dt} = u(t, x(t))$, $x(0) = x_0$.

$$\text{si on connaît } x(t) : \frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \partial_t u + \frac{dx}{dt} \partial_x u = \partial_t u + u \partial_x u = 0$$

$$\Rightarrow u(t, x(t)) = u_0(x_0).$$

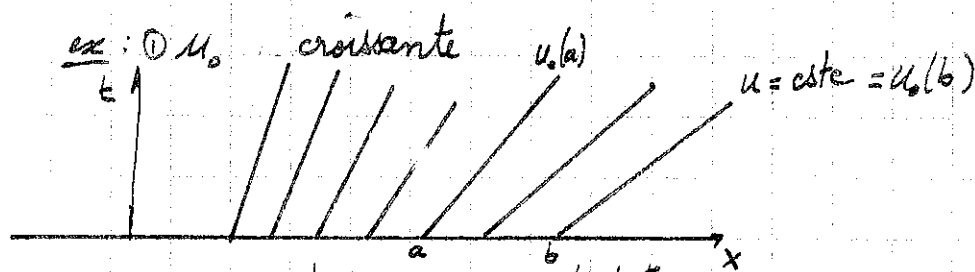
Du coup, on sait résoudre l'équation caractéristique :

$$\frac{dx}{dt} = u_0(x_0) ; x(0) = x_0$$

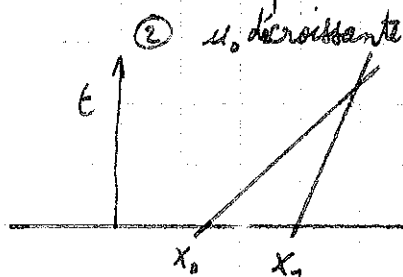
$$\Rightarrow x(t) = x_0 + t u_0(x_0)$$

$$u(t, x + t u_0(x)) = u_0(x)$$

t fixé : $y = x + t u_0(x)$ fonction non linéaire de x , pas forcément inversible



$\Rightarrow$ on peut inverser pour tout temps



$\leftarrow$ on ne peut pas trouver de sol. C^∞ au-delà de ce temps (ni même C^1)

Th : $\sup. u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ est sol. de
 $\partial_t u + u \partial_x u = 0$; $u|_{t=0} = u_0$
 et u_0 n'est pas croissante. Alors, nécessairement

$$T \leq \inf \left\{ -\frac{b-a}{u_0(b)-u_0(a)} ; a < b \text{ et } u_0(a) > u_0(b) \right\}$$

$$= -\frac{1}{\inf \{ u_0'(x) ; x \in \mathbb{R} \}}$$

Don : dernière égalité : $u_0(b) - u_0(a) = (b-a) u_0'(c)$, $a \leq c \leq b$

• preuve alternative : $\sup. u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$
 $0 = \partial_x (\partial_t u + u \partial_x u) = \partial_t \partial_x u + (\partial_x u)^2 + u \partial_x^2 u$

$\nearrow$
 $\partial_t V = \partial_x u$: $\partial_t V + V^2 + u \partial_x V = 0$

$x_0 \in \mathbb{R}$: $y(t) := v(t, x_0 + t u_0(x_0))$

$$\dot{y} = \partial_t V + u_0(x_0) \partial_x V = \partial_t V + u(t, x_0 + t u_0(x_0)) \partial_x V$$

$$= -V^2(t, x_0 + t u_0(x_0)) = -y^2(t).$$

$y(0) = u_0(x_0)$

$\Rightarrow y(t) = \frac{u_0'(x_0)}{1 + t u_0'(x_0)}$: explose $t \rightarrow -\frac{1}{u_0'(x_0)}$ (si...)

Th : Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, avec $\inf_{\mathbb{R}} u_0'$ fini. Alors avec

• $T = \infty$ si $\inf u_0' \geq 0$,

• $T = -\frac{1}{\inf u_0'}$ sinon,

il existe une unique solution $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ au pb $\partial_t u + u \partial_x u = 0$; $u|_{t=0} = u_0$

Elle est donnée implicitement par : $u(t, x) - u_0(x - t u(t, x)) = 0$

Si $u_0 \in C^k$, $k \geq 2$ près de x_0 , alors u est C^k près du segment
 $\{ (t, x_0 + t u_0(x_0)) ; 0 \leq t \leq T \}$

(TFI :

$F(t, x, u) = u - u_0(x - t u)$

$\frac{\partial F}{\partial u} = 1 - t u_0'(x - t u) \neq 0$ car $t \leq T$)

V. Analyse de Fourier

Espace de Schwartz

Définition : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \forall \alpha, p \in \mathbb{N}^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\}$

Prop : . espace vectoriel

. semi-normes $\|f\|_{\alpha, p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$

ex : . $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

. $f(x) = e^{-|x|^2}$, ou plus généralement $e^{-(1+|x|^2)^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

. $f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^N} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall N$.

Déf : . une suite $g_n \in \mathcal{S}$ cv vers g dans $\mathcal{S}$ si $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2d}$,
 $\|g_n - g\|_{\alpha, \beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

. distance : $d(f, g) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha| - |\beta|} \frac{\|g - f\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|g - f\|_{\alpha, \beta}}$.

Proposition : $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d)$ espace métrique complet.

Dém : soit $(g_n)_n$ de Cauchy pour d : $\forall \alpha, \beta, \|g_n - g_m\|_{\alpha, \beta} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$

$K \subset \mathbb{R}^d$ compact : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha g_n$ bornée unif (par rapport à n) sur

Arzela-Ascoli $\Rightarrow$ une sous-suite cv vers $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,
 avec cvu sur tout compact pour $\partial^\alpha g_n$ $\forall \alpha$.

K fixé : $\sup_{x \in K} |x^\alpha \partial^\beta g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |x^\alpha \partial^\beta g_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{\alpha, \beta}$

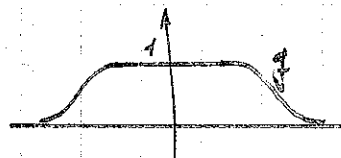
est. ind. $K \Rightarrow g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\sup_K |x^\alpha \partial^\beta (g_m - g)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_K |x^\alpha \partial^\beta (g_m - g_{\ell(h)})| \right)$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m - g_{\ell(h)}\|_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$$

Autres propriétés:

$$\cdot g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d), g(x) = 1 \quad x \text{ près de } 0$$



$$\forall f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d), \quad g(\varepsilon x) f(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \quad \text{pour } d.$$

• conséquence : $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$.

$$\cdot F \in C^\infty(\mathbb{C}^k; \mathbb{C}), F(0) = 0, f_j \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d), 1 \leq j \leq k:$$

$$x \mapsto F(f_1(x), \dots, f_k(x)) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$$

$$(f_1, \dots, f_k) \mapsto F(f_1, \dots, f_k) \text{ continue } \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)^k \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$$

$$\underline{\text{ex}}: (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \psi \text{ bilinéaire continue } \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}.$$

Transformée de Fourier sur $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$

$$\underline{\text{Def}}: u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d): Fu(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

$$\underline{\text{Pete}}: \|\hat{u}(\xi)\| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int |u| \leq c \|(1+|x|)^{d+1} u\|_{\infty(\mathbb{R}^d)}$$

$$\Rightarrow \hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

$$\cdot \hat{u} \in C(\mathbb{R}^d): \text{ Lebesgue.}$$

$$\cdot \text{dérivation sous le signe } \int (\text{Lebesgue}): \partial_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = F((-ix)^\alpha u).$$

$$\cdot F(\partial^\alpha u) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix \cdot \xi} \partial^\alpha u dx : \text{IPP}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int [(-\partial)^\alpha e^{-ix \cdot \xi}] u(x) dx$$

$$= i^\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi).$$

Lemme: si $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et si on note $D_x = \frac{1}{i} \partial_x$

$$D_x^\alpha \hat{u} = \mathcal{F}((-x)^\alpha u)$$

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha u) = \xi^\alpha \hat{u}$$

plus généralement: $P \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(P(D)u) = P(\xi) \hat{u}$.

(A)

ex: transformée de Fourier des gaussiennes.

$$a > 0 \text{ et } \xi \in \mathbb{R}$$

$$f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-a|x|^2/2} dx$$

$$\text{D'après ci-dessus, } f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (-ix) e^{-ix\xi} e^{-ax^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix\xi} \underbrace{(-ix) e^{-ax^2/2}}_{\frac{i}{a} \frac{d}{dx} (e^{-ax^2/2})} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{a} \int e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} (e^{-ax^2/2}) dx$$

$$= -\frac{i}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d}{dx} (e^{-ix\xi}) e^{-ax^2/2} dx = -\frac{\xi}{a} f(\xi).$$

$$\text{Cd: } f'(\xi) = -\frac{\xi}{a} f(\xi) \Rightarrow f(\xi) = f(0) e^{-\xi^2/(2a)}$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2/2} dx \quad y = x\sqrt{a}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$$

$$I^2 = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_{\theta=0}^{+\infty} \int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} : I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Q: $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\xi^2/(2a)}$; sur $\mathbb{R}^d$: $g(x) = e^{-a_1 x_1^2/2 - a_2 x_2^2/2 - \dots - a_d x_d^2/2}$
 $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_d}} e^{-\frac{\xi_1^2}{2a_1} - \dots - \frac{\xi_d^2}{2a_d}}$

Proposition: Si $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$
 L'application $u \mapsto \hat{u}$ est continue de $\mathcal{G}$ dans lui-même.

Dém: Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$: $|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi)| = |F(D_x^\alpha (x^\beta u))|$
 $\leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|D_x^\alpha (x^\beta u)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|(1+|x|)^{d+|\alpha|} \partial_x^\beta (x^\beta u)\|_{L^\infty}$

Ainsi, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi)| < \infty : \hat{u} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$.

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ dans $\mathcal{G}$, on remplace u par $u_n - u$ ci-dessus
 (F est linéaire!), et on déduit $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ dans $\mathcal{G}$.

Notation: $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\sigma_\lambda u)(x) = u(\lambda x)$: dilatation
 $h \in \mathbb{R}^d$: $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$: translation

Prop: $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $h \in \mathbb{R}^d$:

(i) $F(\tau_h u)(\xi) = e^{-i h \cdot \xi} \hat{u}(\xi)$

(ii) $F(e^{i h \cdot x} u)(\xi) = \tau_h \hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi - h)$

(iii) $F(\sigma_\lambda u)(\xi) = |\lambda|^{-d} \hat{u}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$

Dém: exercice.

Remarque fondamentale: $\phi, \psi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$,

$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i x \cdot \xi} \phi(x) \psi(\xi) \frac{d\xi dx}{(2\pi)^{d/2}}$: Fubini

$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i x \cdot \xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \hat{\hat{\psi}}(x) dx$

En notant $(\varphi, \psi) = \int \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$: produit scalaire $L^2(\mathbb{R}^d)$;

cette identité s'écrit aussi : $(F\varphi, \psi) = (\varphi, \tilde{F}\psi)$,

$$\text{ou } \tilde{F}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{+i x \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi$$

NB : au moins formellement, $\tilde{F} = F^*$, op. adjoint de F .

On va montrer la propriété cruciale : $FF^* = F^*F = \text{Id}$ (sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

Lemme Soient $j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int j = 1$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ continue en 0. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u(x) \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = u(0)$$

Dm : on remarque $u(0) = u(0) \int j(x) dx = \int u(0) \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx$.

soit $\eta > 0$: par hyp., $\exists \delta > 0 / |x| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(0)| < \eta$.

$$\left| \int u(x) \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx - u(0) \right| = \left| \int (u(x) - u(0)) \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right|$$

$$\leq \eta \int_{|x| < \delta} \left| \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx$$

$$+ \int_{|x| \geq \delta} |u(x) - u(0)| \left| \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx$$

$$\leq \eta \|j\|_{L^1} + 2\|u\|_{L^\infty} \int_{|x| \geq \delta} \left| \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx$$

$$\leq \eta \|j\|_{L^1} + 2\|u\|_{L^\infty} \int_{|y| \geq \frac{\delta}{\varepsilon}} |j(y)| dy$$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ par CVD.

$$\leq \eta (1 + \|j\|_{L^1}) \text{ si } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon(\eta)$$

Th (Formule d'inversion de Fourier). $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
 (*) $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi = F^* F u$

Dém: on va prendre $j(x) = v(x)$ avec $v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/2}$

$$\text{On a bien } v \in L^1, \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} v = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(2 \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^d = \frac{(2\pi)^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}}$$

$$\begin{aligned} \text{(*) en } x=0: u(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u(x) \varepsilon^{-d} v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u(x) \varepsilon^{-d} (\sigma_{1/\varepsilon} v)(x) dx \end{aligned}$$

NB: on a déjà remarqué $\hat{\hat{v}} = v$

$$\Rightarrow u(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u(x) \varepsilon^{-d} (\sigma_{1/\varepsilon} \hat{v})(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u(x) \underbrace{F(\sigma_{\varepsilon} v)}_{\varepsilon^d F(\sigma_{\varepsilon} v)} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \hat{u}(\xi) (\sigma_{\varepsilon} v)(\xi) d\xi \quad \text{d'après la remarque fondamentale.}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \hat{u}(\xi) v(\varepsilon \xi) d\xi = \underbrace{v(0)}_{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}} \int \hat{u}(\xi) d\xi \quad \text{par c.v.d.}$$

Cel: (*) vraie en $x=0$

Pour le cas général, on utilise à nouveau des astuces algébriques:

$$u(x) = (\varepsilon_{-x} u)(0) = (2\pi)^{d/2} \int \underbrace{F(\varepsilon_{-x} u)(\xi)}_{e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \quad \blacksquare$$

Corollaire: La transformée de Fourier F est une bijection linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse F^* .

La transformée de Fourier sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq 2$

Prop: sup. X espace normé, $E \subset X$ espace dense, Y Banach.
 Si $T: E \rightarrow Y$ appl. linéaire continue ($\exists c, \forall e \in E, \|Te\| \leq c\|e\|$)
 alors il existe une unique appl. linéaire continue $\tilde{T}: X \rightarrow Y$ /
 $\tilde{T}|_E = T$

Dém: exercice.

Rappel: $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

on va définir la transformée de Fourier sur L^1 et sur L^2 :

Lemme: $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 1) $\| \hat{f} \|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_1$
 2) $\| \hat{f} \|_2 = \|f\|_2 = \|F^* f\|_2$

Dém: 1): immédiat

$$2): \| \hat{f} \|_2^2 = \int Ff \overline{Ff} = \int f \overline{F^* Ff} = \int |f|^2 = \|f\|_2^2.$$

Th: $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ se prolonge de manière unique en une appl. linéaire continue $L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^d)$ (fonctions continues bornées de norme égale à $(2\pi)^{-d/2}$).

On a alors, pour $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$

au sens des égalités entre fonctions continues

Dém: $\mathcal{G}$ dense dans L^1 , et lemme 1)

. Norme atteinte en $\xi=0$ si $u \geq 0$ (ex: gaussienne)

. Formule: $u_n \in \mathcal{G}$, $u_n \xrightarrow{L^1} u$

$\Rightarrow \hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ dans C_0 : $\hat{u}_n(\xi) \rightarrow \hat{u}(\xi) \forall \xi$ particulier

$$\text{or } \hat{u}_n(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix \cdot \xi} u_n(x) dx \xrightarrow{L^1} (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$$

$$\text{car } \left| \int e^{-ix \cdot \xi} u_n(x) dx - \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \right| \leq \|u_n - u\|_1$$

Th: (Riemann-Lebesgue)

Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u}(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0$.

Dém: . supposons d'abord $u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$:

$$(2\pi)^{d/2} \hat{u}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx = \frac{1}{|\xi|^2} \sum_{j=1}^d \xi_j^2 \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$$

$$\text{on remarque } \xi_j^2 e^{-ix \cdot \xi} = -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (e^{-ix \cdot \xi})$$

$$(2\pi)^{d/2} \hat{u}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2} \sum_{j=1}^d \int \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (e^{-ix \cdot \xi}) u(x) dx \quad : \text{IPP en } x_j \text{ (2 fois)}$$

$$= -\frac{1}{|\xi|^2} \sum_{j=1}^d \int e^{-ix \cdot \xi} \partial_j^2 u(x) dx$$

$$= -\frac{1}{|\xi|^2} \int e^{-ix \cdot \xi} \Delta u(x) dx$$

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|^2 (2\pi)^{d/2}} \|\Delta u\|_1 \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0.$$

. $u \in L^1$ approché $u_n \in \mathcal{G}$: $\|u - u_n\|_1 \leq \varepsilon$

$$\text{et } |\hat{u}(\xi)| \leq |\hat{u}(\xi) - \hat{u}_n(\xi)| + |\hat{u}_n(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|u - u_n\|_1 + |\hat{u}_n(\xi)|$$

1) n assez grand ; 2) n fixée, $|\xi| \gg 1$ ■

Th (Plancherel) Les appl. F et F^* se prolongent de manière unique en des appl. unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec $FF^* = F^*F = Id$.

Dém : Lemme 2) et $FF^* = F^*F = Id$ car il s'agit d'appl. linéaires continues sur L^2 , coïncident sur $\mathcal{U}$ dense.

NB : si $u \in L^2 - L^1$ (ex : $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ sur $\mathbb{R}$), alors la formule

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \text{ n'a pas de sens.}$$

Q : $F : \begin{matrix} L^1 \longrightarrow L^\infty \\ L^2 \longrightarrow L^2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{entre les deux ?} \end{array} \right.$

Un résultat d'interpolation : le th. de Riesz-Thorin.

T appl. linéaire de $L^p(\mathbb{R}^2, dx)$ dans $L^q(U, dx)$:

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

on suppose en outre T bornée $L^p \rightarrow L^q$: $M = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_q}{\|f\|_p}$ con.

T bornée $L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}$ et $L^{p_2} \rightarrow L^{q_2}$: entre les deux ?

Lemme des trois droites d'Hadamard. Soit F analytique dans la bande ouverte $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ continue et bornée dans la bande fermée $\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.
 Si $|F(it)| \leq M_0$ et $|F(1+it)| \leq M_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 alors $\forall \theta \in [0, 1], |F(\theta+it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Dem. : soient $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $F_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2 + \lambda z} F(z)$

$$|F_\varepsilon(z)| = e^{\varepsilon \operatorname{Re}(z^2) + \lambda \operatorname{Re} z} |F(z)| \leq e^{\varepsilon \operatorname{Re}(z^2) + \lambda \operatorname{Re} z} |F(z)| \xrightarrow{z \rightarrow i\infty} 0$$

$$|F_\varepsilon(it)| \leq M_0 \quad ; \quad |F_\varepsilon(1+it)| \leq M_1 e^{\varepsilon + \lambda}$$

Principe du maximum dans $\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$:

$$|F_\varepsilon(z)| \leq \max(M_0, M_1 e^{\varepsilon + \lambda})$$

$$\begin{aligned} \text{ie } |F(0+it)| &= e^{-\varepsilon \operatorname{Re}(0+it)^2 - \lambda 0} |F_\varepsilon(0+it)| \\ &= e^{-\varepsilon(0^2 - t^2) - \lambda 0} |F_\varepsilon(0+it)| \leq e^{-\varepsilon(0^2 - t^2)} \max(M_0 e^{-\lambda 0}, M_1 e^{(1-0)\lambda}) \end{aligned}$$

On fixe $0 \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$: $z \rightarrow 0$ donne

$$|F(0+it)| \leq \max(M_0 e^{-\lambda 0}, M_1 e^{(1-0)\lambda}) = \max(M_0 e^{-\lambda 0}, M_1 e^{(1-0)\lambda})$$

$$\text{où } \rho = e^\lambda > 0. \text{ On optimise : } M_0 \rho^{-0} = M_1 \rho^{1-0} \Leftrightarrow \rho = \frac{M_0}{M_1}$$

$$\text{Il reste } |F(0+it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

Th (Riesz-Thorin) Supp. $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. On suppose aussi T linéaire
 $T: L^{p_0}(\Omega, d\mu) \rightarrow L^{q_0}(U, d\nu)$ continu, de norme M_0 , $j=0,1$

Alors $T: L^p(\Omega, d\mu) \rightarrow L^q(U, d\nu)$, de norme

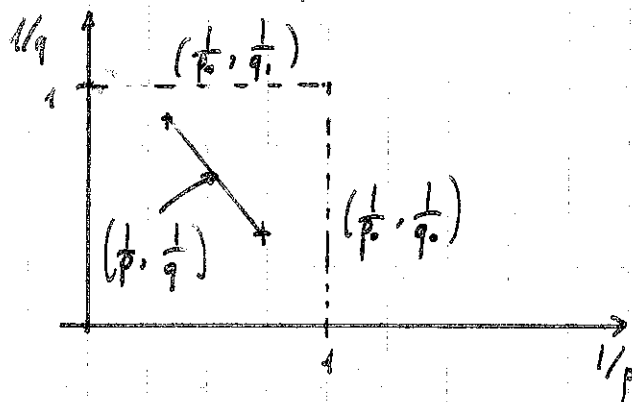
$$(1) \quad M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

où $0 \in]0, 1[$ et

$$(2) \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad ; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Rq : $\phi = \ln M$ fonction convexe.

interprétation géométrique de (2) :



Dém : $\langle h, g \rangle = \int h(y)g(y) d\nu$: Hölder $\Rightarrow \|h\|_p = \sup \{ |\langle h, g \rangle| ; \|g\|_{q'} = 1 \}$

$$\Rightarrow M = \sup \{ |\langle T f, g \rangle|, \|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1 \}.$$

p, q' sont finis : on peut supposer f et g continues à support compact.

Pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$, on note $\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$; $\frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}$,

$$\varphi(z) = \varphi(x, z) = |f(x)|^{p/p(z)} \frac{f(x)}{|f(x)|^{1/p(z)}}, \quad x \in \Omega$$

$$\psi(z) = \psi(y, z) = |g(y)|^{q'/q(z)} \frac{g(y)}{|g(y)|^{1/q(z)}}, \quad y \in U$$

$$\varphi(z) \in L^{p_1}, \quad \psi(z) \in L^{q_1'} \quad (f, g \in C_c)$$

$$\Rightarrow T\varphi(z) \in L^{q_1}$$

$$\varphi'(z) \in L^{p_1}, \quad \psi'(z) \in L^{q_1'}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1 : \varphi'(z) = p\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right) \log |f(x)| \varphi$$

et on garde une puissance > 0 de $|f(x)|$ (donc pour $\operatorname{Re} z \notin \{0, 1\}$ (on peut avoir $p_0 = \infty$ p.ex.))

$$\Rightarrow T(\varphi') \in L^{q_1}.$$

$$F(z) := \langle T\phi(z), \psi(z) \rangle \quad 0 \leq \operatorname{Re} z < 1$$

→ F analytique $0 < \operatorname{Re} z < 1$

→ F borne continue $0 \leq \operatorname{Re} z < 1$

$$\|\phi(it)\|_{L^{p_0}} = \| |f|^{p_0/p_0} \|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^{p_0}}^{p_0} = 1$$

$$\|\phi(1+it)\|_{L^{p_0}} = 1 \quad ; \quad \|\psi(it)\|_{L^{q_0'}} = \|\psi(1+it)\|_{L^{q_0'}} = 1.$$

$$\Rightarrow |F(it)| \leq \|T\phi(it)\|_{L^{q_0}} \|\psi(it)\|_{L^{q_0'}} \leq M_0$$

$$|F(1+it)| \leq M_1.$$

or $\phi(0) = f$, $\psi(0) = g$ donc $F(0) = \langle T f, g \rangle$

Hadamard $\Rightarrow |\langle T f, g \rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Appl: $\Omega = V = \mathbb{R}^d$; $du = dv = dx$ Lebesgue.

Corollaire (Inégalité de Hausdorff-Young): $1 \leq p \leq 2$,

$$\|F u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

où $F: L^p \rightarrow L^{p'}$ par Riesz-Thorin.

Donc: $\|F u\|_2 \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|u\|_1$; $\|F u\|_2 = \|u\|_2$

$$(p_0, q_0) = (1, \infty), M_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} ; (p_1, q_1) = (2, 2), M_1 = 1$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} \quad ; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p'} \quad ; \quad q = p'$$

$$\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$$

Rq: preuve de l'inégalité de Young. $k \in L^q$, $Tf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)f(y)dy$

$$\text{Hölder: } \|Tf\|_{\infty} \leq \|k\|_q \|f\|_{q'} \quad (f \in C_c^\infty)$$

$$\text{Minkowski: } \|Tf\|_{L^q} \leq \|k\|_{L^q} \|f\|_{L^1}$$

$$T: L^{q'} \rightarrow L^\infty \text{ et } L^1 \rightarrow L^q: L^p \rightarrow L^r, \text{ où}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-q}{q'} + \frac{q}{q} \quad ; \quad \frac{1}{r} = \frac{1-q}{\infty} + \frac{q}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q'} \quad \text{et} \quad 1 \leq p \leq q'$$

$$\text{El: } k \in L^q, f \in L^{p'}, 1 < p < q': f \otimes k \in L^2 \text{ pour } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\text{et } \|f \otimes k\|_2 \leq \|k\|_q \|f\|_{p'}.$$

Distributions tempérées

Def: une distribution tempérée est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distri. tempérées.

Prop: Une appl. linéaire $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue ssi $\exists m \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$,
 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), | \langle T, \varphi \rangle | \leq c \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{\infty}(\mathbb{R}^d).$

ex: P polynôme (de degré m): $\langle P, \varphi \rangle = \langle (1+|x|^2)^{-M} P, (1+|x|^2)^M \varphi \rangle$
 $\leq \| (1+|x|^2)^{-M} P \|_1 \| (1+|x|^2)^M \varphi \|_\infty$
 OK si $M \gg 1$.

de même, $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq \infty$ définit une distri. tempérée.

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

Déf (cv faible) Une suite T_n de $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^d)$ cv vers $T \in \mathcal{G}'$ ssi:
 $\forall \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d), \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$
 on écrit $T_n \rightharpoonup T$.

Ex: $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \varphi(0)=1, \varphi(x)=1$ pour $|x| \leq 1$
 $\varphi(x)=0$ pour $|x| \geq 2$
 En effet, pour $\psi \in \mathcal{G}, \langle \varphi(\frac{x}{n})T, \psi \rangle = \langle T, \varphi(\frac{x}{n})\psi \rangle$
 $\varphi(\frac{x}{n})\psi \rightarrow \psi$ dans $\mathcal{G}$.

Rq: famille non dénombrable de semi-normes: $|T|_\psi = |\langle T, \psi \rangle|, \psi \in \mathcal{G}$
 $\mathcal{G}'$ ne peut pas être équipé de métrique.

Rsp: $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^d)$.

Dém: troncature et régularisation

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \varphi(0)=1: \varphi(\frac{x}{n})T$ distri à support compact.

$j_n \in \mathcal{G}, \int j = 1, j(-x) = j(x): j_n(x) = n^d j(nx) \rightarrow \delta$

$T_n := j_n * (\varphi(\frac{x}{n})T) \in \mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$.

$$\langle T_n, \psi \rangle = \langle T, \underbrace{\varphi(\frac{x}{n})(j_n * \psi)}_{\downarrow n \rightarrow \infty} \rangle$$

$$\text{car } \varphi(\frac{x}{n})(j_n * \psi) = \psi(x) = \int \varphi(\frac{x}{n})(\psi(x + \frac{y}{n}) - \psi(x)) j(y) dy.$$

Soit $L: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ linéaire continue. La transposée de L est l'appl. $L': \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}'$ /

$$\langle L'T, \varphi \rangle = \langle T, L\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}, T \in \mathcal{G}'$$

Prop: sup. $L: \mathcal{G}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ appl. linéaire continue et que la restriction de L' à $\mathcal{G}$ est continue $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. Alors L a une unique prolongement continue (séquentiellement) $L: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}'$:

$$\langle LT, \varphi \rangle = \langle T, L'\varphi \rangle \quad \forall T \in \mathcal{G}', \varphi \in \mathcal{G}.$$

Dém: soit $\tilde{L}$ un tel prolongement. $T \in \mathcal{G}', \varphi \in \mathcal{G}, T_n \in \mathcal{G}, T_n \xrightarrow{\mathcal{G}'} T$:

$$\langle LT_n, \varphi \rangle = \langle T_n, L'\varphi \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \langle \tilde{L}T, \varphi \rangle & & \langle T, L'\varphi \rangle \end{array}$$

nécip. : OK

Ex: $L = \partial^\alpha : \langle (\partial^\alpha)'T, \varphi \rangle = \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ par déf.

$$\text{si } T \in \mathcal{G}: \text{IPP} \Rightarrow \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \int T(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = \int (-\partial)^\alpha T(x) \varphi(x) dx \\ \Rightarrow (\partial^\alpha)'|_{\mathcal{G}} = (-\partial)^\alpha.$$

$$\text{et } (\partial^\alpha)' = (-\partial)^\alpha \text{ sur } \mathcal{G}'.$$

L	$L' _{\mathcal{G}}$
∂^α	$(-\partial)^\alpha$
$\mathcal{E}_n$	$\mathcal{E}_n$
$\mathcal{G}_n$	$\mathcal{G}_n$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Th: $h \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{N}^d : \partial^\alpha, \varepsilon_h, \sigma_k, F$, def. de $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$,
ont chacun un unique prolongement en une appl. cont. $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$:

$$\forall T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S},$$

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = \langle T, (-\partial)^\alpha \varphi \rangle$$

$$\langle \varepsilon_h T, \varphi \rangle = \langle T, \varepsilon_{-h} \varphi \rangle$$

$$\langle \sigma_k T, \varphi \rangle = \langle T, k^{-d} \sigma_{1/k} \varphi \rangle = k^{-d} \langle T, \sigma_{1/k} \varphi \rangle$$

$$\langle FT, \varphi \rangle = \langle T, F\varphi \rangle$$

ex: $T=1$

$$\langle F1, \varphi \rangle = \langle 1, F\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{d/2} \varphi(0) \text{ par F.T.} \\ = \langle (2\pi)^{d/2} \delta, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow F1 = (2\pi)^{d/2} \delta.$$

$$T=\delta: \langle F\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, F\varphi \rangle = \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-d/2} \int \varphi(x) dx \\ = \langle (2\pi)^{-d/2}, \varphi \rangle$$

$$F\delta = (2\pi)^{-d/2}.$$

Appl: $(1-\Delta)u = f$

Rsp: soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: $\exists!$ sol. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de $(1-\Delta)u = f$.

Elle est donnée par $\hat{u} = (1+|\xi|^2)^{-1} \hat{f}$.

Ainsi: si $f \in \mathcal{S}$, alors $u \in \mathcal{S}$

si $f \in L^2$, alors $\forall |\alpha| \leq 2, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Don: dernier point uniquement

$$F(D^\alpha u) = \xi^\alpha \hat{u} = \underbrace{\xi^\alpha}_{L^\infty} \underbrace{\hat{f}}_{L^2} \in L^2 + \text{Planchard.}$$

Th (Théorème de Liouville généralisé) Soit $P(D)$ un opérateur aux dérivées partielles à coeff. constants, tq $P(\xi) \neq 0$ si $\xi \neq 0$. Si $u \in \mathcal{S}'$ vérifie $P(D)u = 0$, alors u est un polynôme en x .

ex : $P(D) = 1 - \Delta$ ie $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$

$P = \partial_t^2 - \Delta$: $P(\xi, \tau) = |\xi|^2 - \tau^2$: le th ne s'applique pas (op. hyperbolique).
op. elliptique homogène.

Dém : $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow P(D)u \in \mathcal{S}'$: $0 = F(P(D)u) = P(\xi)\hat{u}$
 $\Rightarrow \text{supp } \hat{u} \subset \{0\}$

$$\Rightarrow \hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta$$

$$u = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha F^{-1}(D^\alpha \delta) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha (-x)^\alpha \underbrace{F^{-1} \delta}_{(2\pi)^{-d/2}}$$

Convolution

$$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : (\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) \psi(y) dy$$

Lebesgue : $\varphi * \psi \in C(\mathbb{R}^d)$, $\varphi * \psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$$\varphi * \psi \in C^\infty \text{ et } D^\alpha(\varphi * \psi) = (D^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * D^\alpha \psi$$

Hölder : $\|\varphi * \psi\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^{p'}}$

Young (...)

Fubini : $\|\varphi * \psi\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^1} \|\psi\|_{L^1}$

$$\varphi * \psi \in L^1, \text{ donc } F(\varphi * \psi)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{-ix \cdot \xi} \left(\int \varphi(x-y) \psi(y) dy \right) dx$$

$$\text{Fubini : } \widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int \psi(y) \left(\int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x-y) dx \right) dy$$

$$F(e_y \varphi) = e^{-iy \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi)$$

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int e^{-iy \cdot \xi} \psi(y) \hat{\varphi}(\xi) dy = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi}(\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

$$\begin{array}{l} \text{map : } \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \\ (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi * \psi \end{array} \quad \text{appl. bilinéaire continue.}$$

$$\begin{aligned} \text{Transposé : } T \in \mathcal{G}, \quad \langle \varphi * T, \psi \rangle &= \int (\varphi * T)(x) \psi(x) dx \\ &= \iint \varphi(x-y) T(y) \psi(x) dx dy \\ &= \int T(y) \left(\int \check{\varphi}(y-x) \psi(x) dx \right) dy, \quad \check{\varphi}(x) = \varphi(-x). \\ &= \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{map : } \varphi \in \mathcal{G} : \text{ l'op. } \varphi * \cdot \text{ se prolonge de manière unique en } \\ \text{un op. séquentiellement continue de } \mathcal{G}' \text{ dans lui-même. De plus} \end{array}$$

$$\langle \varphi * T, u \rangle = \langle T, \check{\varphi} * u \rangle$$

$$F(\varphi * T) = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi} \hat{T}$$

$$D^{\alpha}(\varphi * T) = (D^{\alpha} \varphi) * T = \varphi * D^{\alpha} T$$

prop. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto T * \varphi$ se prolonge de manière unique en une appl. continue $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, avec $\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \varphi * \psi \rangle$

Def. formule de Δ $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ et $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ cont. $\mathcal{S} * \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$

ex. $\delta * = \text{Id}$

$(D^\alpha \delta) * = D^\alpha$

$f \in \mathcal{S}$: $(1 - \Delta) u = f \Leftrightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2}$

si $\hat{K} = \frac{(2\pi)^{-d/2}}{1 + |\xi|^2}$, alors $\hat{u} = \hat{K} * \hat{f}$, ie $u = K * f$

K unique sol. $\mathcal{S}'$ de $(1 - \Delta) K = \delta$

Def. K = fonction de Green.

ex. $W = \{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) / \hat{u} \in L^1 \}$. Mg W algèbre.

Espaces de Sobolev (sur L^2)

Sur $\mathbb{R}^d$, on définit $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ pour $s \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$
 par $W^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) / D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^d), \forall |\alpha| \leq s \}$
 ↑
 dérivée au sens de $\mathcal{D}'$.

Dans le cas $p=2$, le th. de Plancherel nous dit que $u \in L^2 \Leftrightarrow \hat{u} \in L^2$.

Or $\mathcal{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \hat{u}$, donc on a un autre moyen de manipuler les espaces de Sobolev.

Rq. $p=2$, on note $W^{s,2} = H^s$.

Prop : $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. L'ASSE

(1) $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2$ (au sens des distributions)

(2) $\xi \mapsto \xi, \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Def : $s \in \mathbb{R} : H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) / \xi \mapsto \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2\}$

où $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$.

$\|u\|_{H^s} := \|\langle \xi \rangle^s \hat{u}\|_2$.

Prop : $s \in \mathbb{R} : H^s(\mathbb{R}^d)$ espace de Hilbert séparable.

Dem : exercice.

Prop : $\langle \xi \rangle^s \mathcal{F}\delta = \langle \xi \rangle^s (2\pi)^{-d/2} \in L^2 \Leftrightarrow s < -d/2$
 $\Rightarrow \delta \in H^s(\mathbb{R}^d)$ ssi $s < -d/2$.

$f(x) \equiv 1 : f \notin H^s \quad \forall s \triangleq$ pas si facile

$\hat{f} = (2\pi)^{-d/2} \delta ; \langle \xi \rangle^s \hat{f} \in L^2 \Leftrightarrow \sup \{ |\langle \xi \rangle^s \hat{f}, v \rangle| / \|v\|_2 = 1 \} < \infty$

Prop : $-\infty < s < t < \infty : \mathcal{G} \subset H^t \subset H^s \subset \mathcal{S}'$, et chaque inclusion est continue.

Dem : $\mathcal{G} \subset H^s : u_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{G} \Rightarrow (1 + |x|^2)^d (1 - \Delta)^M u_n \xrightarrow{L^2} 0$.

$\Rightarrow (1 - \Delta)^M u_n \xrightarrow{L^2} 0$, car $x \mapsto (1 + |x|^2)^{-d} \in L^2$.

$\Rightarrow \langle \xi \rangle^{2M} u_n \xrightarrow{L^2} 0 : M = \frac{s}{2}$.

$H^s \subset H^t : \langle \xi \rangle^{2s} \leq \langle \xi \rangle^{2t}$.

$$u \in H^s, \varphi \in \mathcal{G} : |\langle u, \varphi \rangle| = |\langle \hat{u}, \hat{\varphi} \rangle| = \left| \int \langle \xi \rangle^s \hat{u} \langle \xi \rangle^{-s} \hat{\varphi} d\xi \right|$$

$$\leq \|u\|_{H^s} \|\varphi\|_{H^{-s}}$$

$$\text{Ainsi, } u \xrightarrow{H^s} 0 \Rightarrow u \xrightarrow{\mathcal{G}'} 0 \blacksquare$$

(*) Rq : Cauchy-Schwarz (et récip.) $\Rightarrow \|u\|_{H^s} = \sup \left| \int u \varphi \right| ; \varphi \in \mathcal{G}, \|\varphi\|_{H^{-s}} = 1$

ex : $P(D)$ op. dérivées partielles à coeff. constants, d'ordre m :

$$|P(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^m$$

$$\Rightarrow P : H^s \rightarrow H^{s-m}$$

Prop : $\varphi \in \mathcal{G}(K^d), s \in \mathbb{R}$. L'appl. $u \mapsto \varphi u$ est continue de H^s dans H^s .

$$\|\varphi u\|_{H^s} \leq C(s, d) \|\langle \xi \rangle^{|\mathbf{s}|} \hat{\varphi}\|_{L^1} \|u\|_{H^s}$$

ex : $\widehat{\varphi u} = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi} * \hat{u}$

(20) $\langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi u} = \int \langle \xi \rangle^s \hat{\varphi}(\xi-\eta) \hat{u}(\eta) d\eta = \int \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \eta \rangle^s} \hat{\varphi}(\xi-\eta) \langle \eta \rangle^s \hat{u}(\eta) d\eta$

But : appliquer l'inégalité de Young $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$

Pour reconnaître une convolution, on espère :

$$(*) \quad \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \eta \rangle^s} \leq C \langle \xi - \eta \rangle^{|\mathbf{s}|}$$

Dans ce cas, on aura $|\langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi u}| \leq C \int \underbrace{\langle \xi - \eta \rangle^{|\mathbf{s}|}}_{L^1} |\hat{\varphi}(\xi - \eta)| \underbrace{\langle \eta \rangle^s |\hat{u}(\eta)|}_{L^2} d\eta$

Bref, il faut montrer (*): symétrie $\omega(\xi, \eta)$, il suffit d'avoir

$$\langle \xi \rangle \leq C \langle \eta \rangle \leq \langle \xi - \eta \rangle$$

$$\nabla(\langle \omega \rangle) = \frac{1}{\langle \omega \rangle} \omega : |\nabla(\langle \omega \rangle)| \leq 1 \quad \forall \omega$$

Inégalité Taylor: $|\langle \xi \rangle - \langle \eta \rangle| \leq |\xi - \eta|$

$$\Rightarrow \langle \xi \rangle \leq \langle \eta \rangle + |\xi - \eta| \leq \langle \eta \rangle (1 + |\xi - \eta|)$$

$$(1 + |\xi - \eta|)^2 = 1 + |\xi - \eta|^2 + 2|\xi - \eta| \leq 1 + |\xi - \eta|^2 + 1 + |\xi - \eta|^2$$

$$\uparrow$$

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow (1 + |\xi - \eta|) \leq \sqrt{2} \langle \xi - \eta \rangle$$

$$\text{et } \langle \xi \rangle \leq \sqrt{2} \langle \eta \rangle \langle \xi - \eta \rangle$$

Prop: $\forall s \in \mathbb{R}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Dém: exercice.

Th (injection de Sobolev) $k \in \mathbb{N}, s > d/2 + k$.

Si $u \in H^k(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in C_b(\mathbb{R}^d)$,
et $D^\alpha u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$.

Il existe $C = C(s, \alpha, d) / \forall u \in H^s(\mathbb{R}^d), \|D^\alpha u\|_\infty \leq C \|u\|_{H^s}$.

Dém: * $\mathcal{S} \subset H^s$ dense et continue: il suffit de montrer l'inégalité sur $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S} \ni u_n \rightarrow u$ dans H^s : si on sait

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{L^\infty} \leq C \|u_n - u_m\|_{H^s}$$

alors $D^\alpha u_n$ CVU: $D^\alpha u_n \rightarrow g_\alpha$, donc $D^\alpha u_n \xrightarrow{q'} g_\alpha$

Unité limite $\mathcal{S}'$: $g_\alpha = D^\alpha u$ + passage à la limite dans l'inégalité.

$$* D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\frac{\xi^\alpha}{\langle \xi \rangle^s}}_{L^2} \langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi) d\xi \quad (u \in \mathcal{S})$$

$$L^2 \text{ car } |\xi| = s < d/2$$

VI Solutions de problèmes d'évolution par analyse de Fourier

Equation de Schrödinger $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$

Pb d'évolution de type Cauchy : $u|_{t=0} = u_0.$

Mécanique quantique : $|u(t, x)|^2 dx = \text{probabilité}$

Vérifions (formellement pour l'instant) que ceci est raisonnable : supp. $\int |u_0|^2 = 1$
et on a $\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Technique : on multiplie l'éq. par $\bar{u}$ (...).
on suppose ici qu'on peut faire les IPP etc.

Méca. Q : $P(\text{particule se trouve dans } E \text{ à l'instant } t) = \int_E |u(t, x)|^2 dx$

$$P(\text{moment se trouve dans } E \text{ à l'instant } t) = \int_E |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi.$$

où E ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$.

Heisenberg : « On ne peut déterminer précisément la position et le moment simultanément. »

Position : $\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^d} x |u|^2 dx$; Moment : $\bar{\xi} = \int_{\mathbb{R}^d} \xi |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi$

Dispersion : $(\sum x_j)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - \bar{x}_j)^2 |u(t, x)|^2 dx$

$$(\sum \xi_j)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (\xi_j - \bar{\xi}_j)^2 |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi.$$

Lemma $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|x_j \varphi\|_2 \| \xi_j \hat{\varphi} \|_2 \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_2^2, 1 \leq j \leq d.$

$\rightarrow$ on ne peut localiser à la fois φ et $\hat{\varphi}$ (plus de 0).

Dém: soit $Q = \int x_j \bar{\varphi} \partial_j \varphi dx$

1) Cauchy-Schwarz: $|Q| \leq \|x_j \varphi\|_2 \|\partial_j \varphi\|_2$

Plancherel: $\|\partial_j \varphi\|_2 = \| \xi_j \hat{\varphi} \|_2$

2) IPP sur $\operatorname{Re} Q$: $\operatorname{Re} \int x_j \bar{\varphi} \partial_j \varphi dx = \int x_j \operatorname{Re}(\bar{\varphi} \partial_j \varphi) dx$
 $= \frac{1}{2} \int x_j \partial_j |\varphi|^2 dx = -\frac{1}{2} \int |\varphi|^2 dx$

3) $\|x_j \varphi\|_2 \| \xi_j \hat{\varphi} \|_2 \geq |Q| \geq |\operatorname{Re} Q| \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_2^2$

Proposition (Principe d'incertitude de Heisenberg)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\delta x_j)^2 (\delta \xi_j)^2 \geq \frac{1}{4}$

Dém: soit $v(t, x) = e^{-i \xi(t) \cdot x} u(t, x + \bar{x}(t))$

$$\int x |v(t, x)|^2 dx = \int x |u(t, x + \bar{x})|^2 dx$$

$$= \int (y - \bar{x}) |u(t, y)|^2 dy = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$\int \xi |\hat{v}(t, \xi)|^2 d\xi = \int \xi |\hat{v}(t, \xi + \bar{\xi})|^2 d\xi = 0.$$

Lemma: $(\delta x_j(v))^2 (\delta \xi_j(v))^2 \geq \frac{1}{4} \|v(t)\|_2^4 = \frac{1}{4}$ car $\int |u|^2 = 1$.

enq $\delta x_j(u) = \delta x_j(v)$ et $\delta \xi_j(u) = \delta \xi_j(v)$.
 (car)

Résolution de l'éq. de Schrödinger : $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0$; $u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$

Supp. pour $t \neq 0$, $u(t, \cdot) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$: on prend le transf. de Fourier (en x)

$$i\partial_t \hat{u} - \frac{1}{2}|\xi|^2 \hat{u} = 0 \quad ; \quad \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0$$

$$\text{EDO d'ordre 1 en } t : \hat{u}(t, \xi) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) \quad (\xi = \text{paramètre})$$

Rappel : $\mathcal{F}$ bijection $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$; $\xi \mapsto e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) \in \mathcal{G}$ (encore)

Cl : Prop : si $u_0 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$, alors $\exists ! u \in C(\mathbb{R}; \mathcal{G})$ sol. Schrödinger

$$u(t, x) = \mathcal{F}^* (e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi))$$

On note $u(t, x) = e^{i\frac{t}{2}\Delta} u_0(x)$.

ex : évolution des gaussiennes

$$g_a(x) = e^{-a|x|^2/2}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

$$e^{i\frac{t}{2}\Delta} g_a(x) = \frac{1}{(1+iat)^{d/2}} e^{-\frac{a}{1+iat} \frac{|x|^2}{2}}$$

$$\text{Détails du calcul : } \hat{g}_a(\xi) = \frac{1}{a^{d/2}} e^{-|\xi|^2/(2a)} \quad (*)$$

$$e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{g}_a(\xi) = \frac{1}{a^{d/2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2} \left(\frac{1}{a} + it \right)} = \frac{1}{a^{d/2}} e^{-\frac{1+iat}{a} \frac{|\xi|^2}{2}}$$

Pour finir : FIF, et (*) encore vraie par prolongement analytique, si $a \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re } a > 0$.

Rq : du coup, on peut garder le calcul dans le cas plus général où, dès le début, $a \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re } a > 0$.

Rq: $|\hat{u}(t, \xi)|^2 = |\hat{u}_0(\xi)|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

→ Plancherel: $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

si $\|u_0\|_2 = 1$ (probabilité), alors $\|u(t, \cdot)\|_2 = 1 \quad \forall t$
 $\Rightarrow$ on garde une mesure de proba.

→ plus fort: la densité de probabilité du moment est conservée.

Propriété: comme $e^{i\frac{t}{2}\Delta} = \mathcal{F}^{-1} e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \mathcal{F}$,
 on vérifie: $e^{i\frac{t}{2}\Delta} (\partial_x^\alpha u_0) = \partial_x^\alpha (e^{i\frac{t}{2}\Delta} u_0)$.

Solutions généralisées de l'équation de Schrödinger

On change les hypothèses sur la donnée initiale:

$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \quad ; \quad u|_{t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, espace de Sobolev.

Idee = $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$: on approche u_0 par des fonctions de $\mathcal{G}$, et on examine $u(t, x)$.

- ça peut raisonnablement marcher car $e^{i\frac{t}{2}\Delta}$ est linéaire.
- ça marche effectivement car $e^{i\frac{t}{2}\Delta}$ est unitaire sur $H^s(\mathbb{R}^d)$, $\forall s$

Prop: pour tout $s \in \mathbb{R}$, tout $t \in \mathbb{R}$, toute $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$,
 $\|U_s(t)f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}$, où on a noté $U_s(t) = e^{i\frac{t}{2}\Delta}$

Dem: $\|U_s(t)f\|_{H^s} = \|e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_2 = \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_2 = \|f\|_{H^s}$.

Cor.: $\forall s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, U_s(t)$ admet un unique prolongement en un opérateur unitaire sur $H^s(\mathbb{R}^d)$. Ce prolongement (encore noté U_s) vérifie $F(U_s(t)f) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{f}$, $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^d)$

Dém.: unique prolongement en une isométrie : immédiat.

$U_s(t_1+t_2) = U_s(t_1)U_s(t_2)$: identité vraie sur $\mathcal{G}$

Or chacun des deux membres est continu et $\mathcal{G}$ est dense dans H donc $U_s(t)^{-1} = U_s(-t)$: $U_s(t)$ est unitaire.

$F(U_s(t)f) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{f}$ sur $\mathcal{G}$, et $U_s(t)$ borné sur H^s , ainsi que $F^{-1} e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} F$: les opérateurs coïncident donc sur H^s .

Notation : $H^{-\infty} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s$; $H^{+\infty} = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s$.

Def. : $u_0 \in H^{-\infty}$; la fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow H^{-\infty}$, définie par

$\hat{u}(t, \xi) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$, est la solution généralisée de l'éq. de Schrödinger avec donnée initiale u_0 .

(*) ex. : $u_0 = \delta$ (rappel : $\delta \in H^s(\mathbb{R}^d) \iff s < -d/2$)

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{\delta} = (2\pi)^{-d/2} \underbrace{e^{-i\frac{t}{2}|\xi|^2}}_{F(\cdot) = ?}$$

Rappel : $g_a(x) = e^{-a|x|^2/2}$ et $\hat{g}_a(\xi) = a^{-d/2} e^{-|\xi|^2/(2a)}$ si $a > 0$

en particulier, pour $\psi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle g_a, \hat{f} \rangle = \langle \hat{g}_a, \psi \rangle = a^{-d/2} \int e^{-|x|^2/(2a)} \psi(x) dx$$

→ fonctions holomorphes pour $\operatorname{Re} a > 0$, continues sur $\{\operatorname{Re} a > 0, a \neq 0\}$, coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$.

→ prolongement analytique : coïncident sur $\{\operatorname{Re} a > 0\}$

→ continuité : coïncident sur $\{\operatorname{Re} a > 0, a \neq 0\}$.

Cd: dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a $\hat{g}_a(\xi) = a^{-d/2} e^{-|\xi|^2/(2a)}$ dès que $\operatorname{Re} a > 0$ et $a \neq 0$.

$a = it$ dans le cas présent: $(it)^{-d/2}$

La formule donne: $u(t, x) = F^{-1} \left((2\pi)^{-d/2} \underbrace{e^{-i \frac{t}{2} |\xi|^2}}_{\text{fct paire de } \xi} \right)$

$$u(t, x) = (2\pi)^{-d/2} F(e^{-i \frac{t}{2} |\xi|^2})$$

$$= (2\pi)^{-d/2} (it)^{-d/2} e^{-|x|^2/(2it)} = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} e^{-i|x|^2/(2t)}.$$

NB: $t > 0$: $\frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} i^{-d/2} = \frac{e^{-i d \pi/4}}{(2\pi t)^{d/2}}$

$t < 0$: $\frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} = \frac{1}{(2\pi(-t))^{d/2}} = \frac{1}{(2\pi|t|)^{d/2}} (-i)^{-d/2} = \frac{e^{+i d \pi/4}}{(2\pi|t|)^{d/2}}$

Rq: $u_t = u_0 * \delta$

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-i \frac{t}{2} |\xi|^2} \hat{u}_0 = e^{-i \frac{t}{2} |\xi|^2} \hat{u}_0 \hat{\delta}$$

$$= \hat{u}_0 e^{-i \frac{t}{2} |\xi|^2} \hat{\delta} = F(u_0 * U_t(H\delta))$$

$$= F(u_0 * \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} e^{i|x|^2/(2t)})$$

An inverse F : $u(t, x) = U_t(t) u_0(x) = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} \int e^{i \frac{|x-y|^2}{2t}} u_0(y) dy.$

Formule « vraie » si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

NB: en général, on n'a pas de formule plus explicite. Exception importante = gaussienne.

c'est en fait déjà assez miraculeux qu'on ait une formule aussi explicite.

Questions de régularité

Prop: si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors u , sol. généralisée de l'éq. de Schrödinger avec donnée initiale u_0 , est tq $u \in C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d))$.

Dém: rappel: 1) si $u_0 \in \mathcal{G}$, alors $u \in C(\mathbb{R}; \mathcal{G})$
 2) $U_0(t)$ unitaire H^s .

$u_0 \in H^s$ approché par $u_{0j} \in \mathcal{G}$: $u_{0j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_0$ dans H^s .

$$\|u_j(t) - u_0(t)\|_{H^s} = \|u_{0j} - u_0\|_{H^s} \quad \forall t, \text{ car } u_j - u_0 = U_0(t)u_{0j} - U_0(t)u_0 = U_0(t)(u_{0j} - u_0)$$

(Eq. linéaire)

Ainsi, $\forall T > 0$, $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $C([-T, T]; H^s)$:

$u_j \rightarrow v$ dans $C([-T, T]; H^s)$.

Or $u(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(t)$ dans H^s (t fixé), donc $u = v$.

On a vu que $\partial_x^\alpha (U_0(t)f) = U_0(t)(\partial_x^\alpha f)$: la régularité en espace est propagée - Régularité en temps?

Eq: $i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u \Rightarrow 1 \text{ dérivée en } t \approx 2 \text{ dérivées en } x$.

Prop: $u_0 \in H^s$, et u sol. généralisée associée. Pour tout $j \in \mathbb{N}$,
 $u \in C^j(\mathbb{R}; H^{s-2j}(\mathbb{R}^d))$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,
 $\|\partial_t^j u(t)\|_{H^{s-2j}} \leq \frac{1}{2^j} \|u_0\|_{H^s}$.

Dém: $u_0 \in \mathcal{G}$: on montre par récurrence $\|\partial_t^j u(t)\|_{H^{s-2j}} = \|(\frac{1}{2}\Delta)^j u(t)\|_{H^{s-2j}} \leq \frac{1}{2^j} \|u(t)\|_{H^s} = \frac{1}{2^j} \|u_0\|_{H^s}$
 . argument de densité comme ci-dessus, dans $\bigcap_{j=0}^\infty C^j([-T, T], H^{s-2j})$.

Cor: sous les mêmes hypothèses.

- 1) $\partial_t^j \partial_x^\alpha u \in C(\mathbb{R}; H^{s-|\alpha|-2j}(\mathbb{R}^d))$.
- 2) si $s-2k > d/2$, alors $u \in C^k(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d)$

Δ $u_0 \in H^s$ fixée, $t \mapsto U_0(t)u_0$ est continue $\mathbb{R} \rightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$.

Il n'y a pas d'uniformité en u_0 : on n'a pas

$$\|U_0(t+h) - U_0(t)\|_{H^s \rightarrow H^s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Prop: soient $t_1 \neq t_2$ et $s \in \mathbb{R}$: $\|U_0(t_1) - U_0(t_2)\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} = 2$

Dém: soit $f \in H^s$: $\|U_0(t_1) - U_0(t_2)\|_{H^s} = \|U_0(t_1)f - U_0(t_2)f\|_{H^s}$
 $\leq \|U_0(t_1)f\|_{H^s} + \|U_0(t_2)f\|_{H^s}$
 $\leq \|f\|_{H^s} + \|f\|_{H^s} = 2\|f\|_{H^s}.$

Ainsi, $\|U_0(t_1) - U_0(t_2)\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq 2.$

$$\begin{aligned} \|U_0(t_1) - U_0(t_2)\|_{H^s} &= \|\langle \xi \rangle^s (e^{-i\frac{t_1}{2}|\xi|^2} - e^{-i\frac{t_2}{2}|\xi|^2}) \hat{f}\|_{L^2} \\ &= 2 \|\langle \xi \rangle^s \sin\left(\frac{t_2 - t_1}{4} |\xi|^2\right) \hat{f}\|_{L^2} \end{aligned}$$

soit ξ_0 tq $\left|\sin\left(\frac{t_2 - t_1}{4} |\xi_0|^2\right)\right| = 1$: un tel ξ_0 existe ssi $t_1 \neq t_2$

$$\xi_0 = (\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,d}) \text{ ou } (\xi_0)_j = \frac{1}{d} \left(\frac{2\pi}{|t_1 - t_2|}\right)^{1/2} \text{ p. ex.}$$

Si on pouvait prendre $\hat{f} = \delta_{\xi=\xi_0}$, on aurait terminé.

On approche par une fonction de ξ : $f(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} e^{-|\xi - \xi_0|^2 / 2\varepsilon^2}$, et $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \| (U_\varepsilon(t_1) - U_\varepsilon(t_2)) f^\varepsilon \|_{H^s}^2 &= 4 \int \langle \xi \rangle^{2s} \sin^2 \left(\frac{t_2 - t_1}{4} |\xi|^2 \right) \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-|\xi - \xi_0|^2 / \varepsilon^2} d\xi \\
 &= 4 \int \langle \xi + \xi_0 \rangle^{2s} \sin^2 \left(\frac{t_2 - t_1}{4} |\xi + \xi_0|^2 \right) \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-|\xi|^2 / \varepsilon^2} d\xi \\
 &= 4 \int \underbrace{\langle \varepsilon \eta + \xi_0 \rangle^{2s} \sin^2 \left(\frac{t_2 - t_1}{4} |\varepsilon \eta + \xi_0|^2 \right)} e^{-|\eta|^2} d\eta
 \end{aligned}$$

$$\leq C + \langle \eta \rangle^{2s}$$

$$\begin{aligned}
 \text{CVD: } \| (U_\varepsilon(t_1) - U_\varepsilon(t_2)) f^\varepsilon \|_{H^s}^2 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 4 \int \langle \xi_0 \rangle^{2s} e^{-|\eta|^2} d\eta \\
 &= 4 \langle \xi_0 \rangle^{2s} \int e^{-|\eta|^2} d\eta = 4 \langle \xi_0 \rangle^{2s} \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \| f^\varepsilon \|_{H^s}^2 &= \| \langle \xi \rangle^s \hat{f}^\varepsilon \|_{L^2}^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-|\xi - \xi_0|^2 / \varepsilon^2} d\xi \\
 &= \int \langle \varepsilon \eta + \xi_0 \rangle^{2s} e^{-|\eta|^2} d\eta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \xi_0 \rangle^{2s} \pi^{d/2}
 \end{aligned}$$

Qd: $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0 / 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow$

$$\| (U_\varepsilon(t_1) - U_\varepsilon(t_2)) f^\varepsilon \|_{H^s} > (2 - \delta) \| f^\varepsilon \|_{H^s}$$

$$\Rightarrow \| U_\varepsilon(t_1) - U_\varepsilon(t_2) \|_{\mathcal{L}(H^s; H^s)} \geq 2 - \delta \quad \forall \delta > 0$$

Exercice: $p \neq 2, t \neq 0$: $\sup_{f \in \mathcal{F}, \|f\|_p=1} \|U_\varepsilon(t)f\|_{L^p} = \infty$.

ie $U_\varepsilon(t)$ n'est pas continue $L^p \rightarrow L^p$ si $p \neq 2$.

Ind.: prendre $f(x) = e^{-\frac{(a+ib)|x|^2}{2}}$, $a > 0, b \in \mathbb{R}$
 et faire varier a selon qu'on ait $p > 2$ ou $p < 2$.

Equation de la chaleur : $\partial_t u = \Delta u$

Calcul formel de transformée de Fourier : $\partial_t \hat{u} = -|\xi|^2 \hat{u}$
 $\Rightarrow \hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$.

→ ressemble plutôt à ce qu'on a trouvé pour Schrödinger.

→ grosse différence toutefois : éq. irréversible.

$u_0 \in \mathcal{S} \Rightarrow$ pour $t > 0$, $u = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) \in \mathcal{G} : \hat{u}(t, \cdot) \in \mathcal{G}$.

mais pour $t < 0$, on peut partir dans les directions :

ex : $u_0(\xi) = e^{-\langle \xi \rangle}$: $e^{-t|\xi|^2 - \langle \xi \rangle}$, pour $t < 0$, n'est même pas dans $\mathcal{G}'$!!

$\Rightarrow$ parallèle avec Schrödinger ok uniquement $t \geq 0$.

Prop : $u_0 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d) : \exists ! u \in C([0, \infty[; \mathcal{G}) / \partial_t u = \Delta u ; u|_{t=0} = u_0$.
 Pour $t \geq 0$, on a $\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$.

ex : $u_0(x) = g_a(x) = e^{-a|x|^2/2}$, $a > 0$.

$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \frac{a^{-d/2}}{a} e^{-|\xi|^2/2a} = \frac{a^{-d/2}}{a} e^{-(2t + \frac{1}{a})|\xi|^2/2}$: 1/4 point

$u(t, x) = a^{-d/2} \left(2t + \frac{1}{a}\right)^{-d/2} e^{-|x|^2/(2(2t + 1/a))}$
 $= (2at + 1)^{-d/2} e^{-|x|^2/(4t + 2/a)}$.

Notation : $u(t, x) = S(t)u_0(x)$.

$\|u(t)\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{H^s} : S(t) \text{ se prolonge } H^s \rightarrow H^s$

Prop : $u_0 \in H^s$: la sol. généralisée vérifie $\partial_t^j u \in C([0, \infty[; H^{s-2j}(\mathbb{R}^d))$.

$$\text{ex: } u_0 = \delta = \hat{u}(t, s) \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}} e^{-\epsilon |s|^2} \text{ et } u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/(4t)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} t > 0: u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ t = 0: u \in H^s \text{ ssi } s < -d/2 \end{array} \right\} \text{ autre argument montrant l'irréversibilité.}$$

Estimations d'énergie:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) dx = \hat{u}(t, 0) = \hat{u}_0(0) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) dx : \text{conservation de l'inv}$$

NB: contrairement au cas de l'éq. de Schrödinger, on peut supposer $u \in \mathbb{R}$ (puisque à séparer $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$). Pour Schrödinger, on passe forcément dans $\mathbb{C}$.

$$u_0 \in \mathcal{S}: \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} u \Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^d} u \Delta u dx = - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \leq 0$$

$t \mapsto \|u(t)\|_2^2$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (on le savait déjà par l'inv.)

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u (\partial_t u - \Delta u) = - \sum_j \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u \partial_{jt} u - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx \leq 0 \text{ (même remarque).}$$

soit $\Psi \in C^2(\mathbb{R})$ convexe avec $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Psi'(u) \partial_t u = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi'(u) \partial_j^2 u dx = - \sum_j \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\Psi''(u)}_{\geq 0} \underbrace{(\partial_j u)^2}_{\geq 0} dx \leq 0.$$

Prop: $u \in C([0, \infty]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ à valeurs réelles et Ψ comme ci-dessus:
 $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u(t, x)) dx$ est une fonction décroissante sur $[0, \infty$.

ex: $\psi(s) = \frac{s^2}{2}$: décroissance norme L^2 .

$\psi(s) = |s|^p$, $2 \leq p < \infty$: $t \mapsto \|u(t)\|_p$ décroissante $\mathbb{R}_+$.

$p \rightarrow \infty$: $\|u(t)\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u(t)\|_p \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|u(t)\|_p = \|u_0\|_\infty$.

$1 \leq p < 2$: $\psi(s) = |s|^p \notin C^2(\mathbb{R})$

$$\psi^\varepsilon(s) = (\varepsilon + |s|^2)^{p/2} - \varepsilon^{p/2}$$

$$\int \psi_\varepsilon(u(t_2, x)) dx \leq \int \psi_\varepsilon(u(t_1, x)) dx \quad \text{si } t_2 \geq t_1$$

passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$: c.v.d.

Rq: ~~ce~~ cette méthode pour obtenir des inégalités a l'air moins efficace que l'analyse de Fourier, pour les estimations H^s . Mais :

- est L^p si-dessus inaccessible par Fourier ;
- méthode suffisamment souple pour servir dans des cas où on ne peut pas utiliser l'analyse de Fourier (eq. à coeff. variables, eq. non linéaires).

* on peut déduire que $S(t)$ se prolonge de manière unique en un op. continu $L^p \rightarrow L^p$, $1 \leq p < \infty$ (fonctions à valeurs réelles).
= autre différence avec Schrödinger.

Equation des ondes

$$(*) \quad \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0; \quad u|_{t=0} = f; \quad \partial_t u|_{t=0} = g.$$

Fourier : $\partial_t^2 \hat{u} + c^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0$: eq. du pendule

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \cos(c|\xi|t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|}.$$

fonctions bornées, régulières ainsi que leurs dérivées en ξ .

Régularité : $\cos(c|\xi|t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(c|\xi|t)^{2j}}{(2j)!}$ et $|\xi|^2$ rég.

$$\frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(c|\xi|t)^{2j+1}}{(2j+1)!} t$$

hyp : si $f, g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$, alors (*) a une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{G})$
Elle est donnée par $\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \cos(ct|\xi|) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}$.

(*) Conservation de l'énergie : f, g à valeurs réelles $\Rightarrow u$ aussi

$$\frac{d}{dt} \int ((\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx = 2 \int \partial_t u \partial_t^2 u + c^2 \nabla u \cdot \nabla(\partial_t u)$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} 2 \int \partial_t u \partial_t^2 u - c^2 \Delta u \partial_t u = 2 \int \partial_t u \uparrow \Delta u = 0.$$

revenir à dire qu'on retrouve cette loi en multipliant l'éq. des ondes par $\partial_t u$ et en intégrant en x .

Autre approche : côté Fourier.

$$\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -c|\xi| \hat{f}(\xi) \sin(ct|\xi|) + \hat{g}(\xi) \cos(ct|\xi|)$$

$$c|\xi| \hat{u}(t, \xi) = c|\xi| \hat{f}(\xi) \cos(ct|\xi|) + \hat{g}(\xi) \sin(ct|\xi|)$$

$$|\widehat{q}u|^2 = c^2|\xi|^2 \left(|\hat{f}(\xi)|^2 \sin^2(ct|\xi|) + |\hat{g}(\xi)|^2 \cos^2(ct|\xi|) \right. \\ \left. - 2c|\xi| \sin(ct|\xi|) \cos(ct|\xi|) \operatorname{Re}(\overline{\hat{f}} \hat{g}) \right)$$

$$c^2|\xi|^2 |\hat{u}(t, \xi)|^2 = c^2|\xi|^2 \left(|\hat{f}(\xi)|^2 \cos^2(ct|\xi|) + |\hat{g}(\xi)|^2 \sin^2(ct|\xi|) \right. \\ \left. + 2c|\xi| \cos(ct|\xi|) \sin(ct|\xi|) \operatorname{Re}(\overline{\hat{f}} \hat{g}) \right).$$

$$|\widehat{q}u|^2 + c^2|\xi|^2 |\hat{u}(t, \xi)|^2 = c^2|\xi|^2 \left(|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{g}(\xi)|^2 \right) : \text{ind. } t.$$

$\int d\xi$ + Plancherel: conservation de l'énergie.

$$x \in \mathbb{R}^{2(s-1)} \text{ avant } \int d\xi : \frac{d}{dt} \left(\| \widehat{q}u \|_{H^{s-1}}^2 + c^2 \| \nabla u \|_{H^{s-1}}^2 \right) = 0.$$

$$E_s = \left\{ (F, G) / \nabla F \in H^{s-1}, G \in H^{s-1} \right\}$$

Th: $s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$: le groupe associé à l'éq. des ondes se prolonge de manière unique en une appl. unitaire de E_s dans lui-même.

Rq: notion de groupe d'évolution.

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad : \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ pour Schrödinger, } t, s \geq 0 \text{ chaleur (semi-groupe)}$$

$$U(0) = \operatorname{Id}$$

Pour l'équation des ondes (ordre 2 en temps), besoin de changer d'inconnue:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} : \partial_t \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \Delta & 0 \end{pmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{u}(t, x) = U(t) \underline{u}_0(x), \text{ avec } \hat{\underline{u}}(t, \xi) = \begin{pmatrix} \cos(ct|\xi|) & \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \\ -c|\xi| \sin(ct|\xi|) & \cos(ct|\xi|) \end{pmatrix} \hat{\underline{u}}_0(\xi)$$

Fonctions de Green

Retour sur la chaleur: $\widehat{S(t)f} = e^{-t|\xi|^2} \widehat{f}$, $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$.

si $\mathcal{F}(K(t)) = (2\pi)^{-d/2} e^{-t|\xi|^2}$, alors

$$\widehat{S(t)f} = (2\pi)^{d/2} \widehat{K(t)} \widehat{f} = \widehat{K(t) * f}.$$

$$\text{ie } S(t)f = K(t) * f : S(t)f(x) = \int K(t, x-y) f(y) dy.$$

$$\text{On a déjà calculé: } K(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/(4t)} = S(t)\delta.$$

$$S(t)f = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy.$$

$$\text{Idem pour Schrödinger: } U_0(t)f(x) = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y) dy.$$

$$\text{On a: } \mathcal{F}\left(U(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cosh|\xi| & \frac{\sinh|\xi|}{c|\xi|} \\ \frac{1}{c|\xi|} \sinh|\xi| & \cosh|\xi| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{f} \\ \widehat{g} \end{pmatrix}$$

$$\text{supp. } \widehat{K(t)} = (2\pi)^{-d/2} \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} : K(t) \in \mathcal{G}'.$$

$$u = \partial_t (K(t) * f) + K(t) * g.$$

$$\text{NB: chaleur: } (\partial_t - \Delta)K = 0 ; K|_{t=0} = \delta$$

$$\text{Schrödinger: } (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta)K = 0 ; K|_{t=0} = \delta$$

$$\text{ondes: } (\partial_t^2 - c^2\Delta)K = 0 ; K|_{t=0} = 0, \partial_t K|_{t=0} = \delta.$$

Def: K = solution fondamentale / propagateur / fonction de Green.

Des conséquences

1) Eq. de la chaleur: $K(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$

Th: $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$: la sol. $u = S(t)f \in C^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$
 Les dérivées sont données par les intégrales absolument convergentes:
 $D_{t,x}^\alpha u(t, x) = \int (D_{t,x}^\alpha K)(t, x-y) f(y) dy$

Dem: 1) $1 \leq p < \infty$: $\exists f_n \in \mathcal{G} / f_n \xrightarrow{\infty} f$ dans L^p .

$u_n = S(t)f_n \xrightarrow{cv} u$ dans $C([0, \infty[; L^p(\mathbb{R}^d))$.

Rappel: $\|S(t)f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ si $f \in \mathcal{G}$ (+critère de Cauchy...)

approche directe: Young

$\|S(t)f\|_{L^p} = \|K * f\|_{L^p} \leq \|K(t)\|_1 \|f\|_{L^p}$

$= \int K(t, x) dx \text{ car } K > 0$
 $= (2\pi)^{d/2} \hat{K}(t, 0) = 1$

$u_n \rightarrow u \quad \mathcal{D}'([0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$

2) $p = \infty$: $f_n \rightarrow f$ faible* dans L^∞ .

$\Rightarrow u_n \rightarrow u$ USC $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d$, donc dans $\mathcal{D}'([0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$.

3) Dans tous les cas: u_n régulière, et

$D_{t,x}^\alpha u_n(t, x) = \int (D_{t,x}^\alpha K)(t, x-y) f_n(y) dy$

soit $\varepsilon > 0$: $D_{t,x}^\alpha K(t, \cdot)$ bornée dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, unif. en $t \gg \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Hölder: $\int D_{t,x}^\alpha K(\cdot) f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^\infty} \int D_{t,x}^\alpha K(\cdot) f$

• membre de gauche cv ($\mathcal{D}'$) $D_{t,x}^\alpha u$: unicité de la limite.

Positivité

Th: supp. $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour un $s \in \mathbb{R}$, ou $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$
Si de plus $f \geq 0$, alors pour tout $t \geq 0$, $S(t)f \geq 0$.

Dém: $j_\varepsilon \geq 0$ approximation de l'identité, $\chi_\varepsilon \geq 0$ troncature.

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{où } j \geq 0 \text{ avec } \int j = 1$$

$$\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x), \quad \chi \geq 0, \quad \text{graphique}$$

$$f_\varepsilon = j_\varepsilon * (\chi_\varepsilon f) \geq 0$$

$$\phi \in \mathcal{G} : \langle S(t)f_\varepsilon, \phi \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle S(t)f, \phi \rangle$$

car $S(t)f_\varepsilon \rightarrow S(t)f$ dans H^s ou L^p .

$$S(t)f_\varepsilon = K(t) * f_\varepsilon \geq 0 : \text{fonctions régulières positives}$$

$$\phi \in \mathcal{G}, \phi \geq 0 : \text{à la limite, } \langle S(t)f, \phi \rangle \geq 0.$$

Corollaire: $f, g \in H^{-\infty}$ ou $f, g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Si $f \geq g$, alors $S(t)f \geq S(t)g$ pour tout $t \geq 0$.

Dém: $f - g \geq 0$ et $S(t)$ linéaire.

Corollaire: $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $u = S(t)f : \forall t \geq 0$,
 $\inf_{\text{ess}} f \leq u(t) \leq \sup_{\text{ess}} f$

Comportement en temps grand

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d): \quad |u(t, x)| = \left| \int K(t, x-y) f(y) dy \right|$$

$$\leq \underbrace{\|K(t)\|_{L^\infty}}_1 \|f\|_{L^1}$$

$$(4\pi t)^{d/2}$$

Th: $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $u(t) = S(t)f$:

$$\|u(t)\|_p \leq \frac{1}{(4\pi t)^{d/(2p')}} \|f\|_{L^1}$$

Dém: $p = \infty$: cf supra

$p=1$: on a vu que l'inégalité de Young donne

$$\|u(t)\|_{L^1} \leq \|K(t)\|_{L^1} \|f\|_{L^1}$$

$$= \int K(t, x) dx \quad \text{car } K \geq 0$$

$$= (2\pi)^{d/2} \hat{K}(t, 0) = 1$$

$1 < p < \infty$: Riesz-Thorin

Plus précisément?

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(0) + e^{-t|\xi|^2} (\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0))$$

$$\leq |\xi| \|\nabla \hat{f}\|_{L^\infty} \quad \text{Riesz}$$

$$\nabla \hat{f} = \mathcal{F}(ixf)$$

$$\|\nabla \hat{f}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|xf\|_{L^1}, \quad \text{si bien sûr } xf \in L^1!$$

Fourier inverse: $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(0) e^{-t|\xi|^2}) = (2\pi)^{d/2} \hat{f}(0) K(t)$
 $= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \right) K(t)$

$$\begin{aligned} \left\| u(t) - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \right) K(t) \right\|_{\infty} &\leq (2\pi)^{-d/2} \left\| \hat{u}(t) - \hat{f}(0) e^{-t|\xi|^2} \right\|_1 \\ &\leq (2\pi)^{-d/2} \left\| e^{-t|\xi|^2} (\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)) \right\|_1 \\ &\leq (2\pi)^{-d/2} \left\| e^{-t|\xi|^2} |\xi| \right\|_{L^1} \left\| \nabla \hat{f} \right\|_{\infty} \\ &\leq (2\pi)^{-d} \left\| x f \right\|_1 \left\| |\xi| e^{-t|\xi|^2} \right\|_{L^1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int |\xi| e^{-t|\xi|^2} d\xi &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} r e^{-t r^2} r^{d-1} dr d\omega \\ &= C_d \int_0^\infty r^d e^{-t r^2} dr \quad : \rho = r \sqrt{t} \\ &= C_d \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{\sqrt{t}} \right)^d e^{-\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{t}} = \frac{C}{t^{(d+1)/2}} \end{aligned}$$

Cd:

Th: si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $x \mapsto |x| f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\exists C = C(d)$

$$\left\| S(t)f - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \right) K(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{t^{\frac{d+1}{2}}} \|x f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

NB: on passe de $\|S(t)f\|_{\infty} \leq \frac{C}{t^{d/2}}$ à une estimation

impliquant un reste plus petit.

$\|K(t)\|_{L^\infty} = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}$: on a vraiment le comportement asymptotique (au 1^{er} ordre) de $S(t)f$.

2) Equation de Schrödinger

Rappel:
$$U_0(t)f(x) = \frac{1}{(2i\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \frac{|x-y|^2}{2t}} f(y) dy$$

comme pour la chaleur, mais $t < 0$ autorisé :

Lemme: $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|U_0(t)f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|2\pi t|^{d/2}} \|f\|_{L^1}$

Prop: $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq 2$: pour $t \neq 0$, $U_0(t)f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, et

$$\|U_0(t)f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{|2\pi t|^{d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}} \|f\|_{L^p}.$$

Dém: $p=1$: cf lemme.

$p=2$: Parseval-Plancherel = $U_0(t)$ unitaire L^2 .

$1 < p < 2$: Riesz-Thorin.

NB: pas d'effet régularisant comme pour la chaleur (eq. réversible)

. il existe une notion d'effet régularisant, qui exige d'intégrer en temps (L^2)

cf plus loin : inégalités de Strichartz.

. pas de propriété type positivité : on travaille dans $\mathbb{C} \dots$

Comportement en temps grand

Lemme: $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On note $v(t, x) = \frac{e^{i|x|^2/2t}}{(it)^{d/2}} \hat{f}\left(\frac{x}{t}\right)$.

Alors $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U_0(t)f - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$.

$$\text{Rq: } v(t, x) = \begin{cases} e^{-id\pi/4} \frac{e^{i|x|^2/2t}}{t^{d/2}} \hat{f}\left(\frac{x}{t}\right) & t > 0 \\ e^{+id\pi/4} \frac{e^{i|x|^2/2t}}{|t|^{d/2}} \hat{f}\left(\frac{x}{t}\right) & t < 0 \end{cases}$$

Dém: on remarque la factorisation $U_0(t) = M_t D_t F M_t$, où

M_t = multiplication par $e^{i|x|^2/2t}$

D_t = dilatation, $(D_t \phi)(x) = \frac{1}{(it)^{d/2}} \phi\left(\frac{x}{t}\right)$

F = Fourier

$$* v(t, x) = M_t D_t F f$$

* M_t, D_t et F sont unitaires sur L^2 :

$$\begin{aligned} \|U_0(t)f - v(t)\|_{L^2} &= \|M D F M f - M D F f\|_{L^2} \\ &= \|M D F (M - 1)f\|_{L^2} = \|(M - 1)f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

$$* |M_t - 1| = |e^{i|x|^2/2t} - 1| \leq 2$$

* on conclut par c.v.d.

Rq: décroissance exponentielle de la chaleur remplacée par des oscillations.

(*) 3) Equation des ondes : ondes radiales en dimension 3

Rappel: $d=1$. $(\partial_t^2 - c^2 \Delta_x)u = 0$, $u \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}) \Rightarrow u(t, x) = a(x-ct) + b(x)$
 $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$

Approche Fourier $\leadsto$ fonction de Green: $u|_{t=0} = f$; $\partial_t u|_{t=0} = g$,

$$u = \partial_t (K(t) * f) + K(t) * g = (\partial_t K(t)) * f + K(t) * g,$$

$$\text{où } \widehat{K(t)} = (2\pi)^{-d/2} \frac{\sin(ct|s|)}{c|s|}.$$

$$d=1: \frac{\sin(ct|s|)}{c|s|} = \frac{\sin(cts)}{c}$$

$$= \int \widehat{K(t)} = (2\pi)^{-d/2} \sin(cts) = (2\pi)^{-d/2} \frac{e^{icts} - e^{-icts}}{2i}$$

$$\text{FIF: } \partial_x K(t) = \frac{\delta_{-ct} - \delta_{ct}}{2c}$$

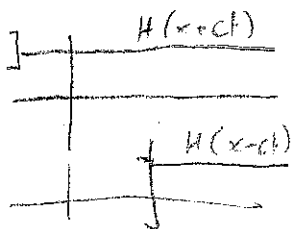
$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} : \partial_x H = \delta_0 : \partial_x H(x-a) = \delta_a$$

$$\Rightarrow \delta_{-ct} - \delta_{ct} = \partial_x \left(\underbrace{H(x+ct) - H(x-ct)}_{\mathbb{1}_{[-ct, ct]}} \right)$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2c} \mathbb{1}_{[-ct, ct]} + C_0$$

Plancherel: $K \in L^2$, $\mathbb{1}_{[-ct, ct]} \in L^2 \Rightarrow C_0 \in L^2(\mathbb{R}) : C_0 = 0$.

$$\boxed{K(t) = \frac{1}{2c} \mathbb{1}_{[-ct, ct]}}$$



$$\frac{d}{dt} \langle K(t), \varphi \rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \varphi \right) = \frac{\varphi(ct) + \varphi(-ct)}{2} = \left\langle \frac{\delta_{ct} + \delta_{-ct}}{2}, \varphi \right\rangle$$

$$\text{Il reste donc: } u(t, x) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

Forme de d'Alembert.

Le cas $d=3$, pour des fonctions radiales.

Laplacien sur $\mathbb{R}^d$ en coordonnées sphériques: $r > 0, \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$$

$d=3$ et $w = w(r)$ ind. $\omega \in \mathbb{S}^{d-1} = \mathbb{S}^2$:

abus de notation: $w(x) = w(r)$

$$\Delta w = \partial_r^2 w + \frac{2}{r} \partial_r w : r \Delta w = r w_{rr} + 2 w_r = (r w)_r$$

(en toute rigueur: $w(x) = \phi(|x|) = \phi(r)$)

$$\Delta w = \partial_r^2 \phi + \frac{2}{r} \partial_r \phi = \frac{1}{r} (r \phi)_r$$

$$\Delta w = \frac{1}{r} (r w)_r$$

on a bien sûr, si w dépend aussi de t : $\partial_t^2 w = \frac{1}{r} (r w)_t$.

Ainsi, si $u = u(t, r)$ est une solution régulière de $(\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^3}) u = 0$,
alors $v(t, r) := r u(t, r)$ vérifie $(\partial_t^2 - \partial_r^2) v = 0, r > 0$.

Or $u = f$ est paire de $r \Rightarrow v$ impaire, et $(\partial_t^2 - \partial_r^2) v$ impaire
 $\Rightarrow (\partial_t^2 - \partial_r^2) v = 0 \quad \forall t, r \in \mathbb{R}$.

Récip., si $(\partial_t^2 - \partial_r^2) v = 0$ } v impaire $\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} u(t, x) = \begin{cases} v(t, |x|)/|x| & x \neq 0 \text{ sol. onde 3} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

En effet, $(\partial_t^2 - c^2 \Delta)u = 0$ pour $x \neq 0$ (on a tout fait pour).

u régulière $\Rightarrow (\partial_t^2 - c^2 \Delta)u$ aussi, et nulle partout sauf éventuellement en 0.

$$\Rightarrow (\partial_t^2 - c^2 \Delta)u = 0 \text{ partout.}$$

Prop: La correspondance $v(t, x) = x u(t, x)$ définit une bijection entre les solutions radiales régulières de $(\partial_t^2 - c^2 \Delta_{\mathbb{R}^2})u = 0$ et les solutions impaires régulières de $(\partial_t^2 - c^2 \Delta_{\mathbb{R}^2})v = 0$.

D'Alembert: $v = \varphi(ct+x) + \psi(ct-x)$, $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} v \text{ impair: } v(t, x) &= \frac{1}{2} (v(t, x) - v(t, -x)) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(ct+x) - \varphi(ct-x) + \psi(ct-x) - \psi(ct+x)] \\ &= F(ct+x) - F(ct-x), \end{aligned}$$

$$\text{où } F(y) = \frac{1}{2} [\varphi(y) - \psi(y)].$$

$R_f: F \rightarrow F + \text{cst}$ ne change rien.

- récip. $F(ct+x) - F(ct-x)$ impaire, rég. si F l'est, et. inv.

Prop: $F \mapsto v$ ($v(t, x) = F(ct+x) - F(ct-x)$) définit une bijection entre $C^\infty(\mathbb{R})/\mathbb{R}$ et l'ensemble des sol. régulières impaires de $(\partial_t^2 - c^2 \Delta_{\mathbb{R}^2})v = 0$.

Cel: l'appl. $F \mapsto u$, $u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} [F(ct+|x|) - F(ct-|x|)] & x \neq 0 \\ F'(ct) & x = 0 \end{cases}$

définit une bij. entre $C^\infty(\mathbb{R})/\mathbb{R}$ et l'ens. des sol. radiales rég. de $(\partial_t^2 - c^2 \Delta_{\mathbb{R}^2})u = 0$

ex.: $(\partial_t^2 - c^2 \Delta_R)u = 0$; $u|_{t=0} = f$; $\partial_t u|_{t=0} = g$

on suppose f, g régulières, radiales, à support dans $B(0, \rho) = \{|x| \leq \rho\}$

Soient $\tilde{f}(h) = hf(h)$, $\tilde{g}(h) = hg(h)$: fcts rég. impaires.

On veut déterminer F : $u(t, r) = \frac{1}{r} (F(ct+r) - F(ct-r))$ $r \neq 0$

$$t=0 : \quad \begin{aligned} F(h) - F(-h) &= \tilde{f}(h) & \Rightarrow F'(h) + F'(-h) &= \tilde{f}'(h) \\ c(F'(h) - F'(-h)) &= \tilde{g}(h) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(h) = \frac{1}{2} \tilde{f}'(h) + \frac{1}{2c} \tilde{g}(h)$$

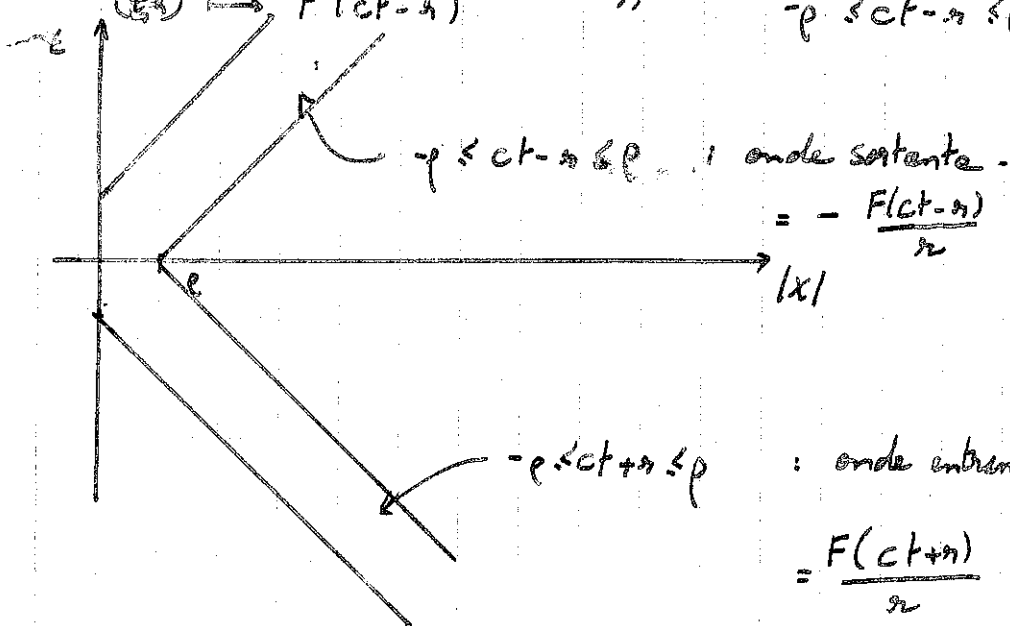
on peut choisir : $F(h) = \int_{-\infty}^h \left(\frac{1}{2} \tilde{f}'(s) + \frac{1}{2c} \tilde{g}(s) \right) ds$.

$$\begin{aligned} r > \rho : F(h) &= 0 & (\tilde{g} \text{ impaire}) \\ r < -\rho : F(h) &= 0 & (\text{évident}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r > \rho : F(h) &= 0 \\ r < -\rho : F(h) &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{supp } F \subset [-\rho, \rho].$$

les propriétés en temps grand : examinons le support de la solution

$(t, r) \mapsto F(ct+r)$ supporté dans $-\rho \leq ct+r \leq \rho$

$(t, r) \mapsto F(ct-r)$ " $-\rho \leq ct-r \leq \rho$



$$= - \frac{F(ct-r)}{r}$$

: onde entrante

$$= \frac{F(ct+r)}{r}$$

entre les
facteurs
multiplicés
-1

VII Analyse non linéaire

Perturbation des équations linéaires « connues »

ex: 1) $(\partial_t^2 - c^2 \Delta)u = 0 \rightsquigarrow (\partial_t^2 - c^2 \Delta)u = \lambda u^p$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
 (relativité: $d=3=p$)

2) $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \rightsquigarrow i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = |u|^{2\sigma}u$, $\sigma > 0$
 (Maxwell en temps diffractif; laser)

NB: les EDP linéaires étudiées dans le chapitre précédent se ramènent toutes à de l'ordre 1 en temps

ex: $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \rightsquigarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$: on double le nb d'inconnues.

Après résolution: $u(t, x) = G(t)u(0, x)$, G groupe.

1) Equation inhomogène

Typiquement, $F = F(t, x)$

$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = F$; $\partial_t u + \Delta u = F$; $(\partial_t^2 - \Delta)u = F$

ex: $\partial_t u - \Delta u = F$. Supposons $F \in C(\mathbb{R}, \mathcal{G})$: Fourier.

$\partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = \hat{F}$; $\hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi)$

$\rightarrow$ EDO inhomogène (...)

$\partial_t \left(e^{+|\xi|^2 t} \hat{u} \right) = e^{+|\xi|^2 t} \hat{F}$

$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \hat{F}(s, \xi) ds$

FI F: $u(t, x) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-s)F(s, x)ds$.

Formule de Duhamel.

ex: formule de Duhamel pour $i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = F$
 $u(t, x) = U(t) u_0(x) - i \int_0^t U(t-s) F(s, x) ds.$

• $(\partial_t^2 - \Delta) u = F$: $\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \rightarrow \partial_t \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \underline{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$

Duhamel: $\underline{u}(t, x) = U(t) \underline{u}_0(x) + \int_0^t U(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ F(s, x) \end{pmatrix} ds$

↑
multiplication, côté Fourier, par $\begin{pmatrix} \cos(t|\xi|) & \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \\ -|\xi| \sin(t|\xi|) & \cos(t|\xi|) \end{pmatrix}$

Principe général: pour ce type d'EDP (le groupe linéaire est « connu » on résout plutôt l'équation sous formulation de Duhamel.

→ donne un sens à la notion de sol. pour une régularité pas forcément élevée.

→ construction par argument de point fixe (Picard).

On considère donc: $u(t, x) = G(t) u_0(x) + \int_0^t G(t-s) F(s, x) ds$ (*)

Hypothèse 1: Pour $s \in \mathbb{R}, T > 0$, le groupe G est continu $[0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^d))$
 $\Rightarrow \exists C / \forall p \in \mathbb{N}, \sup_{0 \leq t \leq T} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(H^p(\mathbb{R}^d))} \leq C \|f\|_{H^p}$

ex: chaleur, Schrödinger, ondes.

Th: Supposons l'hypothèse 1 satisfaite, et soient $s \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ comme dans l'hypothèse. On suppose $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$.
 Si $F \in L^1([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$ (i.e. $t \mapsto \|F(t)\|_{H^s} \in L^1([0, T])$)
 alors (*) possède une unique solution $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$.

Dém: résultat d'unicité: $u^{(j)}(t) = G(t)u_0(x) + \int_0^t G(t-s)F(s)ds$ immédiat
 existence: juste besoin de vérifier la régularité $u \in C([0, T], H^s)$.
 $u(t, x) = G(t)u_0(x) + \int_0^t G(t-s)F(s)ds$

1) $(t, x) \mapsto G(t)u_0(x) \in C([0, T], H^s)$ par hypothèse, puisque $u_0 \in H^s$

2) $(t, x) \mapsto \int_0^t G(t-s)F(s)ds$?

$$\begin{aligned} \int_0^t G(t-s)F(s)ds &= \int_0^t G(t)G(-s)F(s)ds \\ &= G(t) \int_0^t G(-s)F(s)ds \end{aligned}$$

D'après l'hyp. 1, il suffit de montrer $(t, x) \mapsto \int_0^t G(-s)F(s)ds \in C([0, T], H^s)$
 $s \mapsto G(-s)F(s) \in L^1([0, T], H^s)$,

car $\|G(-s)F(s)\|_{H^s} \leq c \|F(s)\|_{H^s} \in L^1([0, T])$

CVD $\Rightarrow (t, x) \mapsto \int_0^t G(-s)F(s)ds \in C([0, T], H^s)$.

2) Problème non linéaire.

Maintenant, $F = F(u)$. Rappel: si $s > d/2$, alors $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Prop: $s > d/2$: $H^s(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre. $\exists c > 0 \forall u, v \in H^s$,
 $\|uv\|_{H^s} \leq c \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}$.

Dém: $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\|uv\|_{H^s}^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{uv}(\xi)|^2 d\xi$$

$$|\widehat{uv}| = (2\pi)^{-d/2} |\widehat{u} * \widehat{v}| = (2\pi)^{-d/2} \left| \int \widehat{u}(\eta) \widehat{v}(\xi - \eta) d\eta \right|$$

On distingue: $\widehat{u} = \frac{\widehat{f}}{\langle \xi \rangle^s}$, $\widehat{f} \in L^2$ car $u \in H^s$
 $\widehat{v} = \frac{\widehat{g}}{\langle \xi \rangle^s}$, $\widehat{g} \in L^2$,

$$\text{et } \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|u\|_{H^s} ; \|\hat{g}\|_2 = \|v\|_{H^s}$$

$$|\hat{u}\hat{v}| \leq c \int \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} \frac{\hat{g}(\xi-\eta)}{\langle \xi-\eta \rangle^s} \right| d\eta \leq c \left(\int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} + \int_{|\eta| > \frac{|\xi|}{2}} \right)$$

$$\text{Dans ① : } |\xi-\eta| \geq |\xi| - |\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}$$

$$\Rightarrow \langle \xi-\eta \rangle \geq c \langle \xi \rangle$$

On a alors

$$\int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} \frac{\hat{g}(\xi-\eta)}{\langle \xi-\eta \rangle^s} \right| d\eta \leq \frac{c}{\langle \xi \rangle^s} \left(\|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2 \right)$$

$$\text{Dans ② : } |\eta| \geq c \langle \xi \rangle$$

$$\int_{|\eta| > \frac{|\xi|}{2}} \left| \frac{\hat{f}(\eta)}{\langle \eta \rangle^s} \frac{\hat{g}(\xi-\eta)}{\langle \xi-\eta \rangle^s} \right| d\eta \leq \frac{c}{\langle \xi \rangle^s} \left(\|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2 \right)$$

$$\text{Il reste : } \|uv\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s \hat{u}\hat{v}\|_2$$

$$\leq c \left(\left\| \frac{\hat{f}}{\langle \xi \rangle^s} * \hat{g} \right\|_2 + \left\| \hat{f} * \frac{\hat{g}}{\langle \xi \rangle^s} \right\|_2 \right)$$

$$\leq c \left(\left\| \frac{\hat{f}}{\langle \xi \rangle^s} \right\|_{L^1} \|\hat{g}\|_2 + \|\hat{f}\|_2 \left\| \frac{\hat{g}}{\langle \xi \rangle^s} \right\|_{L^1} \right)$$

Young

$$\leq c \|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2 \left\| \frac{1}{\langle \xi \rangle^s} \right\|_2$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq c \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}$$

OK car $s > d/2$

Rq: ① On a un résultat plus général et plus précis :
pour $s \geq 0$, $\|uv\|_{H^s} \leq C(\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{H^s})$

On retrouve alors le lemme car $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ si $s > d/2$.
La preuve se fait traditionnellement par des techniques d'analyse harmonique.

② Lemme de Schauder: $G: \mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ tq $G(0)=0$. Alors $u \mapsto G(u)$ envoie $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s > d/2$, et l'app. est unif. lipschitzienne sur les bornés de $H^s(\mathbb{R}^d)$: $\forall R > 0, \exists C_R / \|u\|_{H^s}, \|v\|_{H^s} \leq R \Rightarrow \|G(u) - G(v)\|_{H^s} \leq C_R \|u - v\|_{H^s}$.

③ Lemme de Schauder pour $G = G(x, u)$: sa existe (...)

On s'intéresse à l'éq. (*) $u(t, x) = G(t)u_0(x) + \int_0^t G(t-\tau)F(u(\tau, x))d\tau$.

Hypothèse 2

An suppose $F(z) = \lambda \bar{z}^a z^b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a+b \geq 2$ ($p \geq 2$).

soit: (NLS) $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda \bar{u}^a u^b$
ondes: $(\partial_t^2 - \Delta)u = \lambda \bar{u}^a u^b = \lambda u^{a+b}$ si $u \in \mathbb{R}$ (raisonnable).

Rq: $F(z) = \lambda |z|^{2\sigma} z$, $\sigma \in \mathbb{N}$: courant pour (NLS) (physique). On y revient.

Th: Supposons les hypothèses 1 et 2 satisfaites. On suppose en outre que l'hyp. 1 est satisfaite pour $s > d/2$, et tout $T > 0$. Soit $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Alors il existe une unique solution maximale $u \in C([0, T_+]; H^s(\mathbb{R}^d))$

à (*) ($T_+ > 0$). Elle est maximale: si $T_+ < \infty$, alors

$$\|u(t)\|_{H^s} \xrightarrow{t \rightarrow T_+} +\infty.$$

Lemme: On suppose $\exists s > d/2$, $t_0 \forall T > 0, \exists C_T > 0 /$
 $\forall f \in H^s, \sup_{0 \leq t \leq T} \|G(t)f\|_{H^s} \leq C_T \|f\|_{H^s}.$

On suppose $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et F comme dans l'hyp. 2
 Alors il existe $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^s}$ et t_0
 (*) a une unique solution $u \in C([0, \varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^d)).$

Dém: point fixe : $\Phi(u)(t, x) := G(t)u_0(x) + \int_0^t G(t-t') F(u(t', x)) dt'$

Par hyp. 1, $\Phi(u)(t) \in H^s$ si $u_0, u \in H^s$, et pour $T > 0, T \leq 1$
 $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t)\|_{H^s} &\leq C \|u_0\|_{H^s} + \left\| \int_0^t G(t-t') F(u(t', x)) dt' \right\|_{H^s} \\ &\leq C \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \|G(t-t') F(u(t', x))\|_{H^s} dt' \\ &\leq C \|u_0\|_{H^s} + C \int_0^t \|F(u(t'))\|_{H^s} dt'. \end{aligned}$$

Rappel: Si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2$, alors $uv \in H^s$ et $\exists C$ ind. u, v .
 $\|uv\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}$

Réurrence sur $a+b$: $\|F(u)\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s}^{a+b}$.

il reste, pour $0 \leq t \leq \varepsilon \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t)\|_{H^s} &\leq C \|u_0\|_{H^s} + C \int_0^t \|u(t')\|_{H^s}^{a+b} dt' \\ &\leq C \|u_0\|_{H^s} + Ct \sup_{0 \leq t' \leq t} \|u(t')\|_{H^s}^{a+b}. \end{aligned}$$

(*) On veut appliquer le lemme de point fixe dans
 $X(\varepsilon) = \{ u \in C([0, \varepsilon]; H^s) / \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|u(t)\|_{H^s} \leq 2C \|u_0\|_{H^s} \}$
 pour $\varepsilon > 0$ potentiellement très petit.

→ pour tout $\varepsilon > 0$, $X(\varepsilon)$ est un espace métrique complet, muni de la norme

$$\|u\|_{X(\varepsilon)} = \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|u(t)\|_{H^s}.$$

→ pour appliquer le lemme, on va montrer:

1) Quitte à choisir $\varepsilon > 0$ petit, $\Phi : X(\varepsilon) \rightarrow X(\varepsilon)$.

2) Quitte à choisir $\varepsilon > 0$ encore plus petit, Φ est une contraction sur $X(\varepsilon)$: $\exists c < 1 / \forall u, v \in X(\varepsilon)$

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X(\varepsilon)} \leq c \|u - v\|_{X(\varepsilon)}.$$

1) Calcul précédent: $\|\Phi(u)\|_{X(\varepsilon)} \leq C \|u_0\|_{H^s} + C \varepsilon \|u\|_{X(\varepsilon)}^{a+b}$
 $\leq (2C \|u_0\|_{H^s})^{a+b}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 / \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \forall u \in X(\varepsilon), \Phi(u) \in X(\varepsilon)$.

2) $u, v \in X(\varepsilon)$:

$$\Phi(u) - \Phi(v) = \int_0^t G(t-t') (F(u(t', x)) - F(v(t', x))) dt'$$

Par hypothèse, $|F(u) - F(v)| \leq C(|u|^{a+b-1} + |v|^{a+b-1})|u-v|$
 on justifie (Taylor avec reste intégral)

Δ Ne suffit pas,
 dans H^s
 → plus précis
 ex: $d=1, F(z) = z^2$
 $|F(z)| \leq |z|^2$
 mais $\|F(u)\|_{H^1} \not\leq \|u\|_{H^1}^2$

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq \varepsilon : \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^s} &\leq C \int_0^t \|F(u(t')) - F(v(t'))\|_{H^s} dt' \\ &\leq C \int_0^t (\|u(t')\|_{H^s}^{a+b-1} + \|v(t')\|_{H^s}^{a+b-1}) \|u(t') - v(t')\|_{H^s} dt' \\ &\leq C \int_0^t 2(2C \|u_0\|_{H^s})^{a+b-1} \|u(t') - v(t')\|_{H^s} dt' \\ &\leq 2C (2C \|u_0\|_{H^s})^{a+b-1} \underbrace{t}_{\leq \varepsilon} \|u - v\|_{X(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Cl: $u, v \in X(\varepsilon): \| \phi(u) - \phi(v) \|_{X(\varepsilon)} \leq \underbrace{\tilde{C}}_{< 1} \varepsilon \| u - v \|_{X(\varepsilon)}$
 < 1 si $0 < \varepsilon < 1$.

Lemme de point fixe $\Rightarrow$ pour $0 < \varepsilon < 1$, $\exists! u \in C([0, \varepsilon], H^s)$ sol

Dernier point: ε ne dépend que de $\|u_0\|_{H^s} \rightarrow$ examiner les calculs

Réduction du th.: notion de sol. maximale.

$I := \mathbb{R}$ réunion de tous les intervalles ouverts contenant $t=0$ pour lesquels on a une sol. $C_t H_x^s: [0, \varepsilon] \subset I$, ouvert connexe.
 $\Rightarrow I = [0, T_+]$, $T_+ > 0$.

Supp. $T_+ < \infty$. S'il existe $t_n \xrightarrow{<} T_+$ $(\|u(t_n)\|_{H^s})_n$ bornée:

$\forall n, \|u(t_n)\|_{H^s} \leq R$

Lemme $\Rightarrow u \in C([t_n, t_n + \varepsilon]; H^s)$, où ε dépend de 1 mais pas de n .

n grand: $t_n + \varepsilon > T_+$: contradiction

$\Rightarrow \forall t_n \xrightarrow{<} T_+, (\|u(t_n)\|_{H^s})_n$ non bornée
 ie $\|u(t)\|_{H^s} \xrightarrow[t \rightarrow T_+]{>} \infty$

- Rq:
- ce qu'on utilise vraiment sur F : $\|F(u)\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s}^{a+b}$; $\|\nabla F(u)\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^s}^{a+b-1}$
 - autre nonlinéarité F : lemme de Schauder.
 - calculs plus précis (estimations de Moser): obstruction à l'existence globale = $\|u(t)\|_{L^\infty} \xrightarrow[t \rightarrow T_+]{>} \infty$: plus précis car $H^s \subset L^\infty$.

ex: On peut avoir $\|u(t)\|_{H^s} \xrightarrow[t \rightarrow T_+]{>} \infty$ mais $\|u(t)\|_{L^\infty}$ bornée près $t=T_+$

$u(t, x) = e^{-|x|^2} e^{i \frac{|x|^2}{t-T_+}}$

(X)

Rq: Contrairement au cas linéaire, on n'utilise pas la transformée de Fourier : on ne saurait pas comment faire en général...

Q: comment savoir si $T_+ = +\infty$ ou $T_+ < \infty$?

→ pas de réponse générale

Réponse (très) partielle : si on sait que $u \in L_{loc}^\infty([0, +\infty[; H^s(\mathbb{R}^d))$, alors $T_+ = +\infty$.

Dans plusieurs cas, des propriétés de l'équation permettent d'avoir des estimations a priori faisant intervenir des quantités telles que $\|u(t)\|_2$, $\|\nabla u(t)\|_2$...

ex: équation de la chaleur 1D

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = -\lambda u^{2\sigma+1}; \quad \lambda > 0, \sigma \in \mathbb{N}^*, u \in \mathbb{R}$$

Obtention (formelle) d'estimations a priori:

$$1) \quad u(\partial_t u - \partial_x^2 u) = \lambda u^{2\sigma+2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (u \partial_t u - u \partial_x^2 u) dx = -\lambda \int_{\mathbb{R}} u^{2\sigma+2} dx \leq 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \partial_t (u^2) + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx \quad (\text{on suppose } u(t, x) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 \leq 0 : \|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2.$$

$$2) \quad \partial_x u (\partial_t u - \partial_x^2 u) = -\lambda u^{2\sigma+1} \partial_x u = -\frac{\lambda}{2\sigma+2} \partial_t (u^{2\sigma+2})$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \partial_x u \partial_x^2 u dx = -\frac{\lambda}{2\sigma+2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^{2\sigma+2} dx$$

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\int (\partial_t u)^2 dx = -\int \partial_t u \partial_x^2 u dx + \frac{1}{2\sigma+2} \frac{d}{dt} \int u^{2\sigma+2} dx \\
&= \int \partial_t \partial_x u \partial_x u dx + \frac{1}{2\sigma+2} \frac{d}{dt} \int u^{2\sigma+2} dx \\
&= \int \frac{1}{2} \partial_t (\partial_x u)^2 dx + \frac{1}{2\sigma+2} \frac{d}{dt} \int u^{2\sigma+2} dx \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int (\partial_x u)^2 dx + \frac{1}{2\sigma+2} \int u^{2\sigma+2} dx \right].
\end{aligned}$$

Cl: $t \geq 0, \frac{1}{2} \|\partial_x u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2\sigma+2} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} \leq \frac{1}{2} \|\partial_x u_0\|_2^2 + \frac{1}{2\sigma+2} \|u_0\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$

On va mg $H^1 \subset L^{2\sigma+2}$ (clair car $H^1 \subset L^d \cap L^2 \subset L^{2\sigma+2}$), avec une estimation précise. $\uparrow d/2$ si $d=1$

Lemme ($d=1$): pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, et

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{2} \|u\|_2^{1/2} \|\partial_x u\|_2^{1/2}$$

Dém: Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. $|u(x)|^2 = \int_{-\infty}^x \partial_y (|u(y)|^2) dy$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^x \bar{u}(y) \partial_y u(y) dy$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2 \|u\|_{L^2(-\infty, x]} \|\partial_x u\|_{L^2(-\infty, x]}$$

$$\leq 2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

On en déduit:

Prop: Soit $2 \leq p \leq \infty$. On a $H^1(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ et $\forall u \in H^1(\mathbb{R})$

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{\delta} \|u\|_2^{1-\delta} \|\partial_x u\|_2^{\delta}, \text{ où } \delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Dm: $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int |u(x)|^p dx = \int |u(x)|^{p-2} |u(x)|^2 dx$

$$\leq \int \|u\|_\infty^{p-2} |u(x)|^2 dx = \|u\|_\infty^{p-2} \|u\|_2^2$$

$$\leq 2^{\frac{p-2}{2}} \|u\|_2^{\frac{p-2}{2}} \|\partial_x u\|_2^{\frac{p-2}{2}} \|u\|_2^{\frac{p-2}{2}}$$

lemme

$$\|u\|_p \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|u\|_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \|\partial_x u\|_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \quad \square$$

Retour sur l'exemple: $\lambda > 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\partial_x u(t)\|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \|\partial_x u(t)\|_2^2 + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\partial_x u_0\|_2^2 + \frac{\lambda}{2\sigma+2} \|u_0\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} \leq C(\|u_0\|_{H^1}). \end{aligned}$$

Col: $\exists C > 0 \mid \forall u \in C([0, T_+], H^1(\mathbb{R})), \forall t \in [0, T_+],$

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq C.$$

Ainsi, on ne peut pas avoir $T_+ < \infty$ pour la solution maximale (sinon, pour t proche de T_+ , $\|u(t)\|_{H^1} \gg C+1$), et la solution se est dans H^1 pour tout temps,

$$u \in C([0, +\infty[, H^1).$$

Rq: on obtient même un résultat plus précis, puisque

$$u \in C \cap L^\infty([0, +\infty[, H^1(\mathbb{R})).$$

Autre exemple : $i \partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x^2 u = \lambda |u|^{2\sigma} u$; $u|_{t=0} = u_0$.
 $\lambda \in \mathbb{R}$

NB : $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{C}$

Rq : contrairement au cas de la chaleur, le groupe libre ($\lambda=0$) est défini pour tout temps (eq. réversible), donc on peut adopter l'énoncé du th. en $u \in C([T_-, T_+], H^1(\mathbb{R}))$, $T_{\pm} > 0$.

2 lois de conservation pour (NLS) :

① (masse) $i \bar{u} \partial_t u + \frac{1}{2} \bar{u} \partial_x^2 u = \lambda |u|^{2\sigma+2}$

$$i \int_{x \in \mathbb{R}} \bar{u} \partial_t u + \frac{1}{2} \int \bar{u} \partial_x^2 u dx = \lambda \int |u(t, x)|^{2\sigma+2} dx$$

$$i \int \bar{u} \partial_t u dx - \underbrace{\frac{1}{2} \int \partial_x \bar{u} \partial_x u dx}_{\in \mathbb{R}} = \lambda \underbrace{\int |u|^{2\sigma+2} dx}_{\in \mathbb{R}}$$

Prendons la partie imaginaire :

$$\text{Im } i \int \bar{u} \partial_t u dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \int \bar{u} \partial_t u &= \frac{1}{2} \int (\bar{u} \partial_t u + u \partial_t \bar{u}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \partial_t (\bar{u} u) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2 \quad \forall t \in]-T_-, T_+[$.

② (énergie) $i \partial_t \bar{u} \partial_t u + \frac{1}{2} \partial_t \bar{u} \partial_x^2 u = \lambda |u|^{2\sigma} u \partial_t \bar{u}$

On intègre en x , et cette fois-ci, on prend la partie réelle :

$$0 + \frac{1}{2} \text{Re} \int \underbrace{\partial_t \bar{u} \partial_x^2 u}_{-\int \partial_t \partial_x \bar{u} \partial_x u} = \lambda \text{Re} \int |u|^{2\sigma} u \partial_t \bar{u}$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \partial_t \partial_x \bar{u} \partial_x u = \lambda \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} u \partial_t \bar{u}$$

$$-\frac{1}{4} \int \partial_t (|\partial_x u(t, x)|^2) dx = \lambda \int |u|^{2\sigma} \underbrace{\operatorname{Re} u \partial_t \bar{u}}_{\frac{1}{2} \partial_t (|u(t, x)|^2)}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\partial_x u(t, x)|^2 dx + \lambda \int |u|^{2\sigma} \partial_t |u|^2 dx = 0$$

$$\frac{1}{\sigma+1} \partial_t [(|u|^{2\sigma+2})]$$

Notons $E(t) = \frac{1}{2} \|\partial_x u(t)\|_2^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$

On a $E(t) = E(0)$, $\forall t \in]-T_-, T_+[$.

→ comme pour la chaleur, on a une estimation a priori pour $\lambda > 0$: $\exists C / \|u(t)\|_{H^1} \leq C$.

$\Rightarrow T_- = T_+ = +\infty$.

→ on a la même conclusion si $\lambda < 0$ et σ pas trop grand.

Lemme : Supposons $\lambda < 0$ et $\sigma < 2$. On a l'estimation a priori suivante : Pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, tout $u \in C([-T_-, T_+]; H^1)$ sol. (NLS), il existe $C > 0$ ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^1}$ tq $\forall t \in]-T_-, T_+[$, $\|u(t)\|_{H^1} \leq C$.

Dém : on sait déjà $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$

Energie :

$$\frac{1}{2} \|\partial_x u(t)\|_2^2 = E(t) - \frac{\lambda}{2\sigma+2} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$$

$$= E(0) + \frac{|\lambda|}{2\sigma+2} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$$

$$\leq C(\|u_0\|_{H^1}) + C \left(\|u(t)\|_2^{4-\delta} \|\partial_x u(t)\|_2^\delta \right)^{2\sigma+2}$$

$$\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma+2} = \frac{\sigma}{2\sigma+2}$$

$E(0)$ bien définie
car $u_0 \in H^1$

$$\begin{aligned} \|\partial_x u(t)\|_2^2 &\leq C(\|u_0\|_{H^1}) + C \|u(t)\|_2^{\sigma+2} \|\partial_x u(t)\|_2^\sigma \\ &\leq C(\|u_0\|_{H^1}) + C \|u_0\|_2^{\sigma+2} \|\partial_x u(t)\|_2^\sigma. \end{aligned}$$

Cl: $\|\partial_x u(t)\|_2^2 \leq a + b \|\partial_x u(t)\|_2^\sigma$, où a et b ne dépendent que de $(\lambda, \sigma, \|u_0\|)$ $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$.

Supposons $\exists t_n / \|\partial_x u(t_n)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Dans ce cas, le MG va à l'infini plus vite que le MD: impossible

$$\underbrace{\|\partial_x u(t)\|_2^{2-\sigma}}_{\rightarrow +\infty} \leq \underbrace{\frac{a}{\|\partial_x u(t)\|_2^\sigma}}_{\rightarrow 0} + b$$

$$\Rightarrow \exists C = C(a, b) / \|\partial_x u(t)\|_2 \leq C \quad \forall t \in]-T_-, T_+]$$

On conclut comme avant: $T_- = T_+ = +\infty$.

Rq: on a supposé $\sigma \in \mathbb{N}$ pour construire la sol. u
Schauder mg il suffit de supposer $\sigma > 0$.

Q: la valeur $\sigma = 2$ joue-t-elle un rôle particulier dans le cas $\lambda < 0$?

Prop: La solution de $i \partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x^2 u = -|u|^4 u$

$$u(0, x) = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x\sqrt{2})}} e^{-i \frac{x^2}{2}} =: Q(x) e^{-i \frac{x^2}{2}}$$

est donnée par:

$$u(t, x) = \frac{1}{(1-t)^{1/2}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i \frac{2t-x^2}{2(1-t)}}, \quad t < 1.$$

Dem (exercice avec indications):

• Q est sol. de l'EDO $-\frac{1}{2}Q'' + Q = Q^5$ (E)

$Q(x) = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\cosh(2x\sqrt{2})}}$. On cherche une sol. de (E) sous la forme $Q(x) = \frac{\alpha}{(\cosh(\beta x))^{\gamma}}$

$$Q'(x) = \alpha \cdot (-\gamma\beta) \frac{\sinh(\beta x)}{(\cosh(\beta x))^{\gamma+1}}$$

$$Q''(x) = \alpha(\gamma\beta)(\gamma+1)\beta \frac{\sinh^2(\beta x)}{\cosh(\beta x)^{\gamma+2}} - \alpha\gamma\beta^2 \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\beta x)^{\gamma+1}}$$

$$-\frac{1}{2}Q'' + Q = \frac{\alpha}{(\cosh(\beta x))^{\gamma+2}} \left[-\frac{\beta^2}{2} \gamma(\gamma+1) \sinh^2(\beta x) + \frac{\gamma\beta^2}{2} \cosh^2(\beta x) + \cosh^2(\beta x) \right]$$

$$= \frac{\alpha}{(\cosh(\beta x))^{\gamma+2}} \left[-\frac{\beta^2}{2} \gamma(\gamma+1) \cosh^2(\beta x) + \frac{\beta^2}{2} \gamma(\gamma+1) + \left(\frac{\gamma\beta^2}{2} + 1\right) \cosh^2(\beta x) \right]$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{\alpha^5}{(\cosh(\beta x))^{5\gamma}}$$

$\Rightarrow$ on résout : 1) $-\frac{\beta^2}{2} \gamma(\gamma+1) + \frac{\gamma\beta^2}{2} + 1 = 0$ (forcément !)

2) $\frac{\beta^2}{2} \gamma(\gamma+1) = \alpha^4$

3) $4\gamma = 2$

3) $\Rightarrow \gamma = 1/2$

1) : $-\frac{\beta^2}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\beta^2}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{\beta^2}{8} \Leftrightarrow \beta^2 = 8, \beta = 2\sqrt{2}$ (échange par Q)

$$2) : 4 \times \frac{3}{4} = \alpha^4 \quad ; \quad \alpha = 3^{1/4}$$

La solution de $i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = -|u|^4 u$; $u(0,x) = Q(x)e^{-i\frac{x^2}{2}}$

est donnée par $u(t,x) = (\dots)$ si $-\frac{1}{2}Q'' + Q = Q^5$:

$$= \frac{1}{(1-t)^{1/2}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}}$$

$$i\partial_t u = \frac{i}{2} \frac{1}{1-t} u + i \frac{x}{(1-t)^2} \frac{1}{(1-t)^{1/2}} Q'\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)}$$

$$+ i u e^{-i(\dots)} \partial_t \left(e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}} \right)$$

$$\left(\frac{2i}{2(1-t)} + \frac{i(2t-x^2)}{2(1-t)^2} \right) e^{i(\dots)}$$

$$\partial_x u = \frac{1}{(1-t)^{3/2}} Q'\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i\frac{2t-x^2}{2(1-t)}} - \frac{2ix}{2(1-t)} \frac{1}{(1-t)^{1/2}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)}$$

$$\partial_x^2 u = \frac{1}{(1-t)^{5/2}} Q''\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)} - \frac{2ix}{(1-t)^{5/2}} Q'\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)}$$

$$- \frac{i}{(1-t)^{3/2}} Q\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{i(\dots)} - \frac{x^2}{(1-t)^{5/2}} Q(\dots) e^{i(\dots)}$$

$$= -\frac{i}{1-t} u$$

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = -u \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t}{(1-t)^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-t)^{5/2}} Q''(\dots) e^{i(\dots)}$$

$$= \frac{-1}{(1-t)^{5/2}} e^{i(\dots)} \left(-\frac{1}{2} Q''\left(\frac{x}{1-t}\right) + Q\left(\frac{x}{1-t}\right) \right)$$

$$= Q^5\left(\frac{x}{1-t}\right) = -|u|^4 u \quad \blacksquare$$

Col: dans le cas $\sigma=2$, $\lambda=-1$, on a $T_- = +\infty$, mais $T_+ = 1$ (pour ce choix de u_0).

↳ en fait, on peut avoir $T_- = +\infty$ et $T_+ > 0$ quelconque en jouant avec u_0 .

On a utilisé de façon fine l'injection $H^1(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, avec une inégalité. C'est plus général. On voudra p.ex. $H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$
 → quels p ?

3) Injections de Sobolev

Lemme: Soit $m \geq 2$, et pour $1 \leq j \leq m$, $p_j \in [1, \infty]$, avec $\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} = 1$.
 Alors $\forall u_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d), \dots, u_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int |u_1 \dots u_m| dx \leq \|u_1\|_{p_1} \dots \|u_m\|_{p_m}.$$

Dem: $m=2$: Hölder.

$$\int |u_1 \dots u_{m+1}| dx \leq \|u_1 \dots u_m\|_{p_{m+1}'} \|u_{m+1}\|_{p_{m+1}}$$

or $\frac{1}{p_{m+1}'} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}$, donc $1 = \sum_{j=1}^m \frac{p_{m+1}'}{p_j} : \tilde{p}_j = \frac{p_j}{p_{m+1}'} \in [1, \infty]$

$$\|u_1 \dots u_m\|_{p_{m+1}'}^{p_{m+1}'} = \int |u_1|^{p_{m+1}'} \dots |u_m|^{p_{m+1}'} dx$$

$$\leq \| |u_1|^{p_{m+1}'} \|_{\tilde{p}_1} \dots \| |u_m|^{p_{m+1}'} \|_{\tilde{p}_m}$$

$$\left(\int |u_j|^{p_{m+1}' \tilde{p}_j} \right)^{1/\tilde{p}_j} = \left(\int |u_j|^{p_j} \right)^{p_{m+1}'/p_j} = \|u_j\|_{p_j}^{p_{m+1}'}$$

Col: $(H_m) \Rightarrow (H_{m+1})$

Prop: $d \geq 2$. Soit $1 \leq p < d$. Il existe $C > 0$ / $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}} \leq C \|\nabla u\|_p.$$

Dém: $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a, pour tout $1 \leq j \leq d$,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_j} \partial_j u(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_d) dy_j$$

$$\text{Donc } |u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_j u(x_1, \dots, y_j, \dots, x_d)| dy_j =: I_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d)$$

$$|u(x)|^d \leq \prod_{j=1}^d I_j$$

$$|u(x)|^{d/d-1} \leq \left(\prod_{j=1}^d I_j \right)^{1/d-1}$$

On intègre en x_1 : on intègre $d-1$ termes à droite
 $\Rightarrow$ on a avec $p_1 = \dots = p_{d-1} = d-1$, $u_j = |I_j|^{d-1}$.

$$\int |u(x)|^{d/d-1} dx_1 \leq I_1(x_2, \dots, x_d)^{1/d-1} \left(\prod_{j=2}^d |I_j|_{L^1_{x_1}} \right)^{1/d-1}$$

et ainsi de suite avec $x_2, \dots, x_d$:

$$\int |u(x)|^{d/d-1} dx \leq |\partial_1 u|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1/d-1} \dots |\partial_d u|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1/d-1} \leq \|\nabla u\|_1^{d/d-1}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} \leq \|\nabla u\|_1 \quad : \text{prop. pour } p=1.$$

$1 \leq p < d$: $v = |u|^\gamma$, $\gamma > 1$

$$\|v\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} \leq \|\nabla v\|_1 = \gamma \| |u|^{\gamma-2} u \nabla u \|_1 \leq \gamma \| |u|^{\gamma-2} \|_p \|\nabla u\|_p$$

$$\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}}^{\frac{d}{\gamma}} \leq \underbrace{\gamma}_{\frac{d}{p'(d-1)}} \|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}}^{\gamma-1} \|\nabla u\|_p$$

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\gamma} \leq C \|u\|_{L^{p'(\gamma-1)}}^{\gamma-1} \|Vu\|_p.$$

On veut simplifier : $\frac{d\gamma}{d-1} = p'(\gamma-1) \quad : \quad \gamma(p' - \frac{d}{d-1}) = p'$

Comme $1 \leq p < d$, $\frac{1}{p} > \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{1}{p'} < 1 - \frac{1}{d} = \frac{d-1}{d}$, ie $p' > \frac{d}{d-1}$

$$\gamma = \frac{p'}{p' - \frac{d}{d-1}} > 1 : \text{OK.}$$

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} \leq C \|Vu\|_p$$

$$\frac{d\gamma}{d-1} = \frac{d}{d-1} \frac{p'}{p' - \frac{d}{d-1}} \quad \left(p' = \frac{p}{p-1} \right)$$

$$= \frac{d}{d-1} \frac{p}{p - \frac{d}{d-1}(p-1)} = \frac{d}{d-1} \frac{p(d-1)}{p(d-1) - d(p-1)} = \frac{dp}{d-p} \quad \square$$

Corollaire: $d \geq 3$: $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$ - Il existe $C > 0$ / $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_2^{1-\delta} \|Vu\|_2^{\delta}, \quad \delta = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right).$$

Dém: $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2} =: 2^*$: on peut donc trouver $\theta \in (0, 1)$ /

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{2^*}$$

$$\|u\|_p = \| |u|^{1-\theta} |u|^{\theta} \|_p \leq \| |u|^{1-\theta} \|_{L^{\frac{2}{1-\theta}}} \| |u|^{\theta} \|_{L^{2^*/\theta}}$$

$$\leq \|u\|_2^{1-\theta} \|u\|_{2^*}^{\theta}$$

$$\text{Rep.} \rightarrow \leq C \|u\|_2^{1-\theta} \|Vu\|_2^{\theta}$$

Maintenant, calculons θ : $\frac{1}{2^*} = \frac{d-2}{2d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{d} : \quad \theta = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) = \delta \quad \blacksquare$$

Rq : on a déjà vu que le corollaire est vrai aussi pour $d=1$.
 $\rightarrow$ il est en fait vrai pour tout d :

Corollaire : $d=2$, $2 \leq p < \infty$. Il existe $C > 0$ / $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\delta} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^\delta ; \delta = 4 - \frac{2}{p}$$

Dém : on part à nouveau de la proposition : si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

On montre par récurrence :

$$(H_j) \quad \|u\|_{L^{2j}}^j \leq C_j \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^{j-1}.$$

$j=1$: évident.

$$j \geq 2 : \|u\|_{L^{2j}}^j = \| |u|^j \|_{L^2} \leq C \|\nabla(|u|^j)\|_{L^1} \leq C_j \| |u|^{j-1} \nabla u \|_{L^2}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_j \| |u|^{j-1} \|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} C_j \|u\|_{L^{2j-2}}^{j-1} \|\nabla u\|_{L^2} \end{aligned}$$

$$(H_{j-1}) \leq \tilde{C}_j \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^{j-1} \|\nabla u\|_{L^2}$$

Ainsi, $(H_j) \Rightarrow (H_{j+1})$.

On a donc montré le corollaire pour tout p de la forme $p=2j$, $j \in \mathbb{N}$.

* Soit maintenant $p \in [2, \infty[$ (pas forcément un entier pair).
Il existe $j \in \mathbb{N} / 2j \leq p < 2j+2$ ($j = [\frac{p}{2}]$).

$$\Rightarrow \exists \theta \in]0, 1[/ \frac{1}{p} = \frac{\theta}{2j} + \frac{1-\theta}{2j+2}$$

$$\text{Holder : } \|u\|_p = \| |u|^\theta |u|^{1-\theta} \|_p$$

$$\leq \| |u|^\theta \|_{2j} \| |u|^{1-\theta} \|_{2j+2}$$

$$\leq \left(\|u\|_2^{1/j} \|\nabla u\|_2^{j-1} \right)^\theta \left(\|u\|_2^{1/(j+1)} \|\nabla u\|_2^{j/(j+1)} \right)^{1-\theta}$$

$$\leq \|u\|_2^{\frac{\theta}{j} + \frac{1-\theta}{j+1}} \|\nabla u\|_2^{\theta \frac{j-1}{j} + (1-\theta) \frac{j}{j+1}}$$

$$\underbrace{\|u\|_2^{2/p}}_{\|u\|_2^{2/p}}$$

$$\text{On remarque ensuite } \frac{\theta}{j} + \frac{1-\theta}{j+1} + \theta \frac{j-1}{j} + (1-\theta) \frac{j}{j+1} = 1$$

$$\Rightarrow \|u\|_p \leq \|u\|_2^{2/p} \|\nabla u\|_2^{1-2/p}$$

Rq : on n'a pas $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Plus généralement, on n'a pas $H^{d/2}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ($s > d/2$).

$d=2$: soit $f \in L^2$, $f \geq 0$, avec $\langle \xi \rangle^{-1} f \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$f(\xi) = \frac{1}{\langle \xi \rangle \ln(\langle \xi \rangle^2 + 2)}$$

$\rightarrow f \geq 0$: ok

$$\rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^2) : f(\xi) = g(|\xi|), g(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{1/2} \ln(2+r^2)}$$

$$g(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2r \ln r} \quad ; \quad f \in C(\mathbb{R}^4): \text{pb d'intégrabilité} = r \rightarrow +\infty$$

$$\int_{R_0}^R |g(r)|^2 r dr \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^2}}{\sim} \frac{1}{4} \int_{R_0}^R \frac{r dr}{r^2 (\ln r)^2}$$

$$\frac{1}{r (\ln r)^2} = \frac{u'}{u^2}, \quad u(r) = \ln r$$

$$\Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\langle \xi \rangle^{-1} f \notin L^1: \frac{r g(r)}{r+1} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2r \ln r} : \frac{u'}{u}, \quad u(r) = \ln r$$

$$\int^\infty \ln(u(r)) dr = \infty \Rightarrow \langle \xi \rangle^{-1} f \notin L^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\text{Soit } u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\langle \xi \rangle^{-1} f)$$

$$\rightarrow \text{comme } f \in L^2(\mathbb{R}^4): u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

$$\rightarrow \text{formellement, } u(0) = \int \hat{u}(\xi) d\xi = \int \langle \xi \rangle^{-1} f(\xi) d\xi = +\infty$$

$$\rightarrow \text{retour de la rigueur: si on avait } u \in L^\infty, \text{ alors}$$

$$\left| \int u(x) n^2 e^{-\frac{n^2 |x|^2}{2}} dx \right| \leq \|u\|_\infty \underbrace{\left\| n^2 e^{-\frac{n^2 |x|^2}{2}} \right\|_1}_{\left\| e^{-|x|^2/2} \right\|_1}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \int u(x) \underbrace{n^2 e^{-\frac{n^2 |x|^2}{2}}}_{\Psi_n(x)} dx &= \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}\Psi_n \rangle \\ &= \int \langle \xi \rangle^{-1} f(\xi) e^{-\frac{|\xi|^2}{2n^2}} d\xi \end{aligned}$$

$$\text{convergence croissante } (f \geq 0): \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ou Fatou}} \int \langle \xi \rangle^{-1} f(\xi) d\xi = +\infty$$

4) Application : équation de Schrödinger non linéaire

$$(NLS) \quad i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

On procède comme dans le cas $d=1$ pour avoir des conservations:

$$(NLS) \times \bar{u} \quad \text{et} \quad \text{Im} \int : \quad \frac{d}{dt} \int |u(t, x)|^2 dx = 0.$$

$$(NLS) \times \partial_t \bar{u} \quad \text{et} \quad \text{Re} \int : \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{\lambda}{\sigma+1} \int |u(t, x)|^{2\sigma+2} dx \right) = 0.$$

Rq: en général, on ne connaît pas de loi de conservation faisant intervenir des normes de Sobolev d'indice supérieurs (typiquement, H^2 ou H^3).

• seule exception connue: $\sigma = d = 1$.

$$M = \int |u(t, x)|^2 dx = \|u(t)\|_2^2$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{\lambda}{\sigma+1} \int |u(t, x)|^{2\sigma+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}. \end{aligned}$$

Quelles estimations a priori?

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$$

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 = E - \frac{\lambda}{\sigma+1} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$$

→ si $\lambda \geq 0$: $\exists C > 0$ / $\|u(t)\|_{H^1} \leq C$ (tant que...)

→ si $\lambda < 0$ et $\sigma \leq \frac{2}{d-2}$ (si $d \geq 3$), alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 &\leq C + C \left(\|u\|_2^{1-\delta} \|\nabla u\|_2^\delta \right)^{2\sigma+2} & \delta = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma+2} \right) \\ & & = \frac{d\sigma}{2\sigma+2} \\ &\leq C + C \|u(t)\|_2^{2\sigma+2-d\sigma} \|\nabla u(t)\|_2^{d\sigma} \\ &\leq C + C \|\nabla u(t)\|_2^{d\sigma} \end{aligned}$$

→ si $\sigma < 2/d$: $\exists C / \|u(t)\|_{H^1} \leq C$

→ si $\sigma = \frac{2}{d}$: $\exists R / \text{si } \|u\|_2 < R, \text{ alors } \|u(t)\|_{H^1} \leq C$

Rq: $d=1$. On a $R = \|Q\|_2$: résultat optimal.

→ si $\sigma > 2/d$: on ne peut rien dire.

Cl: on voudrait une théorie H^s pour le problème de Cauchy.
On a supposé jusqu'à présent $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2$.
⇒ besoin d'une autre approche si $d \geq 2$.

VIII Equation de Schrödinger non linéaire

NB: tout le contenu de ce chapitre possède un analogue pour l'éq. des ondes $\partial_t^2 u - \Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u = 0$.
C'est toutefois un peu plus délicat du point de vue technique (espaces de Besov).

$$(NLS) \quad i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \quad u|_{t=0} = u_0$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma > 0$$

Hyp: motivé par le chapitre précédent, on suppose $\sigma < \frac{2}{d-2}$ si $d \geq 3$.

But: Avoir une théorie pour le problème de Cauchy dans H^1 ,
afin (dans certains cas) d'obtenir une solution globale en temps.

1) Un résultat négatif

- $\lambda \geq 0$: estimation a priori H^1
- $\lambda < 0$: ça dépend. En particulier, on ne peut pas dire que la solution est bornée a priori dans H^1 , si $\sigma \geq 2/d$.

Th: On suppose $\lambda < 0$ et $\sigma \geq 2/d$. Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $x \mapsto |x| u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $E(u_0) < 0$, alors
[(NLS) n'a pas de solution globale $u \in C([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}^d))$.

$$\Sigma = H' \cap F(H')$$

Lemme. Soit $T > 0$. On suppose $u \in C([0, T]; H^1)$ et $u_0 \in F(H^1)$.

Alors $u \in C([0, T]; \Sigma)$ et si on note

$$y(t) = \int |x|^2 |u(t, x)|^2 dx,$$

on a $y \in C^1([0, T]; \mathbb{R}_+)$ et

$$y'(t) = 2 \operatorname{Im} \int \bar{u}(t, x) x \cdot \nabla u(t, x) dx$$

Dém: on admet la première partie de l'énoncé, ainsi que la propriété $y \in C^1$. On se concentre sur le calcul formel:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} \int |x|^2 |u(t, x)|^2 dx = \int |x|^2 \frac{\partial}{\partial t} (|u(t, x)|^2) dx \\ &= 2 \operatorname{Re} \int |x|^2 \bar{u}(t, x) \partial_t u(t, x) dx \\ &= 2 \operatorname{Re} (-i) \int |x|^2 \bar{u}(t, x) i \partial_t u(t, x) dx \\ &= 2 \operatorname{Im} \int |x|^2 \bar{u} \left(-\frac{1}{2} \Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u \right) dx \\ &= -\operatorname{Im} \int |x|^2 \bar{u} \Delta u = - \sum_{j=1}^d \operatorname{Im} \int |x|^2 \bar{u} \partial_j^2 u \\ &= \sum_{j=1}^d \operatorname{Im} \int \partial_j (|x|^2 \bar{u}) \partial_j u \\ &= \sum_{j=1}^d \operatorname{Im} \int 2x_j \bar{u} \partial_j u = 2 \operatorname{Im} \int \bar{u} x \cdot \nabla u \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme: Sous les hypothèses du lemme précédent, on a de plus $y \in C^2([0, T])$

et

$$y''(t) = 2 \int |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{2\lambda}{\sigma+1} d \int |u(t, x)|^{2\sigma+2} dx$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Dem:}} \quad y''(t) &= \frac{d}{dt} \left(2 \operatorname{Im} \int \bar{u}(t, x) x \cdot \nabla u(t, x) dx \right) \\ &= 2 \operatorname{Im} \int \partial_t \bar{u} x \cdot \nabla u + 2 \operatorname{Im} \int \bar{u} x \cdot \nabla \partial_t u \\ \partial_t \bar{u} &= -\frac{i}{2} \Delta \bar{u} + i \lambda |u|^{2\sigma} \bar{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.) \quad 2 \operatorname{Im} \int \partial_t \bar{u} x \cdot \nabla u &= -\operatorname{Re} \int \Delta \bar{u} x \cdot \nabla u + 2 \lambda \operatorname{Re} \int |u|^{2\sigma} \bar{u} x \cdot \nabla u \\ &= -\operatorname{Re} \int \Delta \bar{u} x \cdot \nabla u + \lambda \int |u|^{2\sigma} x \cdot \underbrace{(2 \operatorname{Re} \bar{u} \nabla u)}_{\nabla |u|^2} \\ &= -\operatorname{Re} \int \Delta \bar{u} x \cdot \nabla u + \frac{\lambda}{\sigma+1} \int x \cdot \nabla (|u|^{2\sigma+2}) \\ &= -\operatorname{Re} \int \Delta \bar{u} x \cdot \nabla u - \frac{\lambda d}{\sigma+1} \int |u|^{2\sigma+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad 2 \operatorname{Im} \int \bar{u} x \cdot \nabla \partial_t u &= 2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Im} \int \bar{u} x_j \partial_j \partial_t u \\ &= -2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Im} \int \partial_j (x_j \bar{u}) \partial_t u \\ &= -2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Im} \int \partial_j (x_j \bar{u}) \left(-\frac{i}{2} \Delta u - i \lambda |u|^{2\sigma} u \right) \\ &= -\sum_{j=1}^d \operatorname{Re} \int \partial_j (x_j \bar{u}) \Delta u + 2 \lambda \operatorname{Re} \sum \int \partial_j (x_j \bar{u}) |u|^{2\sigma} u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.) \quad \operatorname{Re} \int \Delta \bar{u} x \cdot \nabla u &= \operatorname{Re} \sum_{j,k} \int \partial_j^2 \bar{u} x_k \partial_k u = -\operatorname{Re} \sum_{j,k} \int u \partial_k^2 (x_k \partial_j^2 \bar{u}) \\ &= -\operatorname{Re} \sum_{j,k} \int u (\partial_j^2 \bar{u} + x_k \partial_{kjj}^3 \bar{u}) \\ &= -d \operatorname{Re} \sum_j \int u \partial_j^2 \bar{u} + \operatorname{Re} \sum_{j,k} \int \partial_j (u x_k) \partial_{jk}^2 \bar{u} \\ &= +d \int |\nabla u|^2 + \operatorname{Re} \sum_{j,k} \int x_k \partial_j u \partial_{jk}^2 \bar{u} + \operatorname{Re} \sum_{j,k} \int \delta_{jk} u \partial_{jk}^2 \bar{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j,k} \int x_k \partial_k |\partial_j u|^2 + \operatorname{Re} \sum_j \int u \partial_j^2 \bar{u} \\
&= d \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j,k} \int |\partial_j u|^2 - \operatorname{Re} \sum_j \int \partial_j u \partial_j \bar{u} \\
&= d \int |\nabla u|^2 - \frac{d}{2} \int |\nabla u|^2 - \int |\nabla u|^2 = \frac{d}{2} \int |\nabla u|^2 - \int |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.) \quad \sum_{j=1}^d \operatorname{Re} \int \partial_j (x_j \bar{u}) \Delta u &= \sum_{j,k} \operatorname{Re} \int \partial_j (x_j \bar{u}) \partial_k^2 u \\
&= \sum_{j,k} \operatorname{Re} \int \bar{u} \partial_k^2 u + \operatorname{Re} \int x_j \nabla \bar{u} \Delta u \\
&= -d \int |\nabla u|^2 + \operatorname{Re} \int x \cdot \nabla \bar{u} \Delta u \\
&= -d \int |\nabla u|^2 + \frac{d}{2} \int |\nabla u|^2 - \int |\nabla u|^2 \left(-\frac{d}{2} - 1 \right) \int 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_j \int \partial_j (x_j \bar{u}) |u|^{2\sigma} u &= 2 \operatorname{Re} \sum_j \int (\bar{u} + x_j \partial_j \bar{u}) |u|^{2\sigma} u \\
&= 2d \int |u|^{2\sigma+2} + \int x_j |u|^{2\sigma} \underbrace{2 \operatorname{Re} (u \partial_j \bar{u})}_{\partial_j |u|^2} = 2d \int |u|^{2\sigma+2} + \frac{1}{\sigma+1} \sum_j \int x_j \partial_j |u|^{2\sigma+2} \\
&= \left(2d - \frac{d}{\sigma+1} \right) \int |u|^{2\sigma+2}.
\end{aligned}$$

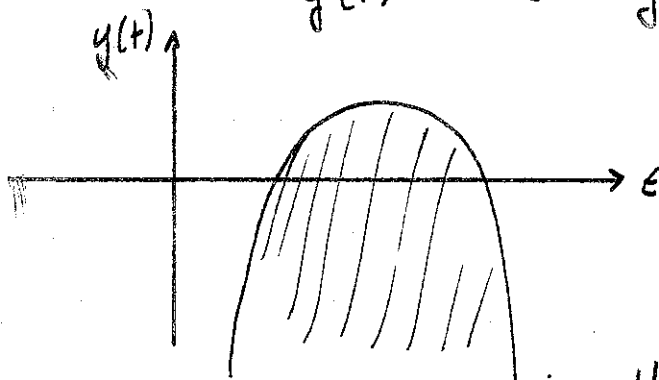
$$\begin{aligned}
\text{Cel: } y''(t) &= -\frac{d}{2} \int |\nabla u|^2 + \int |\nabla u|^2 - \frac{\lambda d}{\sigma+1} \int |u|^{2\sigma+2} \\
&\quad + \frac{d}{2} \int |\nabla u|^2 + \int |\nabla u|^2 + 2d\lambda \int |u|^{2\sigma+2} - \frac{d\lambda}{\sigma+1} \int |u|^{2\sigma+2} \\
&= 2 \int |\nabla u|^2 + 2d\lambda \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma+1} \right)}_{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \int |u|^{2\sigma+2}
\end{aligned}$$

Comme $E = \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$, on a

$$\begin{aligned} y''(t) &= 4E - \frac{4\lambda}{\sigma+1} \int |u(t,x)|^{2\sigma+2} dx + \frac{2\lambda d\sigma}{\sigma+1} \int |u|^{2\sigma+2} \\ &= 4E + \frac{2\lambda}{\sigma+1} (d\sigma - 2) \int |u(t,x)|^{2\sigma+2} dx \end{aligned}$$

Rappel: $\sigma \geq 2/d$ et $\lambda < 0$: $y''(t) \leq 4E$.

$$\begin{aligned} \bullet E < 0: \quad y'(t) &\leq 4Et + y'(0) \\ y(t) &\leq 2Et^2 + y'(0)t + y(0) \end{aligned}$$



$t \gg 1 \Rightarrow y(t) < 0$: impossible car $y \geq 0$ par définition
 $\Rightarrow y$ ne peut être E^2 sur $\mathbb{R}_+$
 $\Rightarrow u \notin C(\mathbb{R}_+, H^1)$.

Rq: $u_0 \in \Sigma$ donné: u_λ^1 avec λu_0 , $|\lambda| \gg 1 \Rightarrow E(u_\lambda^1) < 0$.

2) Inégalités de Strichartz

Proposition (inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev)

Soient $0 < p < 1$, $1 < r < q < \infty$, avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - p$

Alors pour toute $f \in L^r(\mathbb{R})$, on a $|t|^{-(1-p)} * f \in L^q(\mathbb{R})$ et $\exists C > 0$

$$\forall f \in L^r, \quad \| |t|^{-(1-p)} * f \|_q \leq C \|f\|_r$$

On admet le résultat.

Rq : il s'agit d'une généralisation de l'inégalité d'Young

$$\|f * g\|_q \leq \|g\|_{L^p} \|f\|_{L^r} \quad \text{si} \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

$$g(t) = |t|^{-(1-p)} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1-p : g \in L^{\frac{1}{1-p}}(\mathbb{R})?$$

$$g(t)^{\frac{1}{1-p}} = \frac{1}{|t|} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

En fait, $g \in L^{\frac{1}{1-p}}(\mathbb{R})$, où $L^p_f(\mathbb{R}) = \{g \text{ mesurable} /$

$$\forall C/\forall \lambda > 0, \text{ mes } \{x / |g(x)|^p > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}\}$$

$L^p_f(\mathbb{R})$ généralise $L^p(\mathbb{R})$: Bineyrie - Tchebychev,

$$\text{mes } \{x / |g(x)|^p > \lambda\} \leq \frac{\|g\|_p^p}{\lambda}$$

$$\lambda \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\lambda < |g(x)|^p} dx}_{\text{mes } \{x / |g(x)|^p > \lambda\}} \leq \int |g(x)|^p \mathbb{1}_{\lambda < |g(x)|^p} dx \leq \|g\|_p^p$$

Equation de Schrödinger inhomogène : $i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = F$; $u|_{t=0} = u_0$

On s'intéresse plutôt à la formulation de Duhamel :

$$u(t) = U(t)u_0 - i \underbrace{\int_0^t U(t-s) F(s) ds}_{R(F)(t, x)} ; \quad U(t) = e^{\frac{it}{2} \Delta} \text{ groupe lib}$$

Def : un couple (p, q) est admissible si $2 \leq q < 2^* (d \geq 2)$
 $(2 \leq q \leq \infty \text{ si } d=1)$ et $\frac{2}{p} = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$.

Th (inégalités de Strichartz) $d \geq 1$

1) Soit (p, q) un couple admissible. Il existe C_q /

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \|U(\cdot)\phi\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_q \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

2) Soient (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux couples admissibles. Soit I un intervalle de temps contenant 0. Il existe C_{q_1, q_2} /

$$\forall F \in L^{p_2'}(I, L^{q_1'}(\mathbb{R}^d)), \|R(F)\|_{L^{p_1}(I, L^{q_2}(\mathbb{R}^d))} \leq C_{q_1, q_2} \|F\|_{L^{p_2'}(I, L^{q_1'}(\mathbb{R}^d))}$$

Rq : Le point 1) impose la relation $\frac{2}{p} = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$.

Soit $v(t, x) = U(t)\phi(x)$: $i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = 0$; $v|_{t=0} = \phi$
 Pour $\lambda > 0$, on introduit

$$v_\lambda(t, x) = v(\lambda^2 t, \lambda x).$$

$$\Rightarrow i\partial_t v_\lambda + \frac{1}{2}\Delta v_\lambda = 0 ; v_\lambda|_{t=0} = \phi_\lambda, \text{ où } \phi_\lambda(x) = \phi(\lambda x).$$

Si 1) est vraie pour v , elle l'est pour $v_\lambda \forall \lambda > 0$:

$$\|v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^d))} \leq \underset{\text{ind. } \lambda}{C_q} \|\phi_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\begin{aligned} \|\phi_\lambda\|_{L^2}^2 &= \int |\phi(\lambda x)|^2 dx = \lambda^{-d} \int |\phi(\lambda x)|^2 \lambda^d dx \\ &= \lambda^{-d} \|\phi\|_{L^2}^2 : \|\phi_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{-d/2} \|\phi\|_{L^2} \end{aligned}$$

$$\|v_\lambda(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^q = \int |v(\lambda^2 t, \lambda x)|^q dx = \lambda^{-d} \|v(\lambda^2 t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^q$$

$$\|v_\lambda(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-d/q} \|v(\lambda^2 t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\|v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))}^p = \lambda^{-dp/q} \int_{\mathbb{R}} \|v(\lambda^2 t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^p dt \quad z = \lambda^2 t$$

$$= \lambda^{-dp/q} \lambda^{-2} \int \|v(z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^p dz$$

$$= \lambda^{-dp/q-2} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))}^p$$

$$\lambda^{-\frac{d}{q}-\frac{2}{p}} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_q \lambda^{-d/2} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\forall \lambda > 0, \|v\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_q \lambda^{\frac{2}{p}-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$\Rightarrow$ possible uniquement si $\frac{2}{p} = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ (sinon: $\lambda \rightarrow 0$ ou $\lambda \rightarrow +\infty$).

. Dans 2) : même intervalle de temps I des deux côtés.

. les couples (p_1, q_1) et (p_2, q_2) sont indépendants l'un de l'autre.

. Rappel: $t \neq 0, U(t): L^q(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ ssi $q=2$.

$$\text{ie } \|U(t)\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

$$U(t): L^2 \rightarrow L^2 \text{ (unitaire)}$$

1) mg même si $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ "uniquement", alors p.p. $t \in \mathbb{R}$, $U(t)\phi \in L^2$.

$\leadsto$ effet régularisant (moins fort que pour la chaleur).

$$C_2 = 1 = C_{22}.$$

. Historiquement : restriction de la transformée de Fourier à une hypersurface

Étapes de la preuve

1) Fourier permet de voir : $\|U(t)\phi\|_2 = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Fonction de Green : } U(t)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int e^{i \frac{|x-y|^2}{2t}} \phi(y) dy$$

$$\Rightarrow \|U(t)\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

$$\text{Riesz-Thorin : } \|U(t)\phi\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi t)^{d(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}} \|\phi\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^d)} \\ \forall r \in [2, \infty]$$

2) Par dualité, 1) équivaut à :

$$\left\| \int U(-s) F(s) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|F\|_{L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{R}^d))}.$$

3) Méthode TT^* (analyse harmonique) :

$$\left| \iint \langle U(-s)F(s), U(-t)G(t) \rangle ds dt \right| \leq C \|F\|_{L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{R}^d))} \|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{R}^d))}$$

Par symétrie $\iint_{s < t}$ suffit

$$4) \quad |\langle U(-s)F(s), U(-t)G(t) \rangle| = |\langle U(t-s)F(s), G(t) \rangle|$$

$$\leq \|U(t-s)F(s)\|_{L^q} \|G(t)\|_{L^{q'}}$$

$$\leq C \frac{1}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|F(s)\|_{L^{q'}} \|G(t)\|_{L^{q'}}$$

$$5) \quad \left| \iint_{s < t} \right| \leq C \iint_{s < t} \frac{1}{|t-s|^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|F(s)\|_{L^{q'}} \|G(t)\|_{L^{q'}} ds dt \\ \leq C \int_{\mathbb{R}} \|F\|_{L^{q'}} * |t|^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|G(t)\|_{L^{q'}} dt$$

$$\leq C \|G\|_{L^{p'} L^{q'}} \| \|F\|_{L_x^{q'}} \|t\|^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}\|_{L_t^p}$$

$$\text{HLS: } r = p', \quad 1 - p = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) = \frac{2}{p} \quad : \quad p = 1 - \frac{2}{p} < 1$$

$$(p = 1 \Leftrightarrow p = \infty : L^\infty L^2 \text{ immédiat})$$

$$p > 0 : \quad p < 2 \Leftrightarrow d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{d} = \frac{d-2}{2d} = \frac{1}{2}$$

$$\leq C \|G\|_{L^{p'} L^{q'}} \|F\|_{L^{p'} L^{q'}}, \text{ car } \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{p'} - p = \frac{1}{p'} - 1 + \frac{2}{p} = \frac{1}{p}$$

6.) Preuve de 2) : on n'en parle pas.

3) Application 1: NLS sous-critique L^2

$$i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u \quad ; \quad u|_{t=0} = u_0$$

$$x \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Prop : on suppose $\sigma < 2/d$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, L^2) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2\sigma})$ de (NLS). De plus, $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Rq : besoin de $L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^d))$ pour pouvoir énoncer l'unicité.

$L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}_{loc}$: en général, pas mieux.

le signe de λ n'intervient pas : hypothèse $\sigma < 2/d$.

on n'a pas forcément $\sigma \in \mathbb{N}^*$. En fait, $\sigma \in \mathbb{N}^*$ ssi $d = \sigma = 1 \dots$

Lemme: $\exists \tau > 0$ ne dépendant que de $\sigma, d, |h|$ et $\|u_0\|_2$
et une unique sol. $u \in C([-\tau, \tau]; L^2) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau, \tau]; L^{2\sigma+2})$

Dém.: Sens de la solution: Duhamel, ie résoudre.

$$u(t) = \underbrace{U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-s)(|u|^{2\sigma}u)(s)ds}_{\Phi(u)(t)}$$

But: trouver un point fixe pour Φ .

$$X(\tau) = \left\{ u \in C([-\tau, \tau]; L^2) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau, \tau]; L^{2\sigma+2}) \right\}$$

$$\|u\|_{L^\infty([-\tau, \tau]; L^2)} \leq 2\|u_0\|_2$$

$$\|u\|_{L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([-\tau, \tau]; L^{2\sigma+2})} \leq 2 C_{2\sigma+2} \|u_0\|_2$$

Strichartz

On montre: si $\tau > 0$ est suffisamment petit, alors
 $\Phi: X(\tau) \rightarrow X(\tau)$ et réalise une contraction.

$$\ast \quad p = \frac{4\sigma+4}{d\sigma} ; q = 2\sigma+2 : (p, q) \text{ est admissible}$$

$$\ast \quad \frac{1}{q'} = \frac{2\sigma+1}{q} ; \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2\sigma}{k}, \text{ avec } k = \frac{4\sigma(\sigma+1)}{2-(d-2)\sigma}$$

$$\ast \quad \sigma < 2/d \Rightarrow k < p$$

$$\text{En effet: } k < p \Leftrightarrow d\sigma^2 < 2 - (d-2)\sigma$$

$$\Leftrightarrow d\sigma^2 + (d-2)\sigma - 2 < 0.$$

$$\Delta = (d-2)^2 + 8 = (d+2)^2 : \sigma_- = \frac{2-d-(d+2)}{2d} = -1$$

$$\sigma_+ = \frac{2-d+d+2}{2d} = \frac{2}{d}$$

et $\sigma \in]\sigma_-, \sigma_+[$

Stabilité :

Soit $u \in X(\varepsilon)$:

$$\| \phi(u) \|_{L^\infty([-\varepsilon, \varepsilon]; L^2)} \leq \| V(\cdot) u_0 \|_{L^\infty([-\varepsilon, \varepsilon]; L^2)} + \| R(|u|^{2\sigma} u) \|_{L^\infty([-\varepsilon, \varepsilon])}$$

$$\leq \| u_0 \|_{L^2} + C_{2q} \| |u|^{2\sigma} u \|_{L^{p'}([-\varepsilon, \varepsilon]; L^{q'})}$$

↑
Strichartz

$$\text{Hölder : } \| |u|^{2\sigma} u \|_{L^{p'}([-\varepsilon, \varepsilon]; L^{q'})} \leq \| u \|_{L^k([-\varepsilon, \varepsilon]; L^q)}^{2\sigma} \| u \|_{L^p([-\varepsilon, \varepsilon]; L^q)}$$

$$\| \phi(u) \|_{L^\infty([-\varepsilon, \varepsilon]; L^2)} \leq \| u_0 \|_{L^2} + C_{2q} \| u \|_{L^k([-\varepsilon, \varepsilon]; L^q)}^{2\sigma} \| u \|_{L^p([-\varepsilon, \varepsilon]; L^q)}$$

$\leq 2C_q \| u_0 \|_{L^2} \text{ car } u \in X(\varepsilon)$

$$\| u \|_{L^k([-\varepsilon, \varepsilon]; L^q)} \leq \| 1 \|_{L^\theta([-\varepsilon, \varepsilon])} \| u \|_{L^p([-\varepsilon, \varepsilon]; L^q)}$$

$$\text{or } \frac{1}{k} = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p} : k < p \Rightarrow \theta > 0$$

$$\leq (2\varepsilon)^{1/\theta} \| u \|_{L^p([-\varepsilon, \varepsilon]; L^q)}$$

$$\Rightarrow \| \phi(u) \|_{L^\infty([-\varepsilon, \varepsilon]; L^2)} \leq \| u_0 \|_{L^2} + C_{2q} (2C_q \| u_0 \|_{L^2})^{2\sigma+1} (2\varepsilon)^{2\sigma/\theta}$$

$$\leq 2\| u_0 \|_{L^2} \text{ si } \varepsilon > 0 \text{ est assez petit.}$$

$$\begin{aligned}
* \|\phi(u)\|_{L^p([L-\tau, \tau], L^q)} &\leq \|U(\cdot)u_0\|_{L^p L^q} + \|R(|u|^{2\sigma}u)\|_{L^p L^q} \\
&\leq C_q \|u_0\|_2 + C_{qq} \underbrace{\| |u|^{2\sigma}u \|_{L^p L^q}}_{\text{comme avant}} \\
&\leq C_q \|u_0\|_2 + C_{qq} (2C_q \|u_0\|_2)^{2\sigma+1} (2\tau)^{2\sigma/\theta}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ quitte à prendre τ encore plus petit : ϕ envoie $X(\tau)$ dans $X(\tau)$.

Contraction

$u, w \in X(\tau)$:

$$\begin{aligned}
\|\phi(u) - \phi(w)\|_{L^\infty([L-\tau, \tau], L^q)} &= \|R(|u|^{2\sigma}u) - R(|w|^{2\sigma}w)\|_{L^\infty([L-\tau, \tau], L^q)} \\
&= \|R(|u|^{2\sigma}u - |w|^{2\sigma}w)\|_{L^\infty([L-\tau, \tau], L^q)} \\
&\leq C_{2q} \| |u|^{2\sigma}u - |w|^{2\sigma}w \|_{L^{p'}([L-\tau, \tau], L^q)}
\end{aligned}$$

Fait : $\exists C / \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \left| |z_1|^{2\sigma}z_1 - |z_2|^{2\sigma}z_2 \right| \leq C(|z_1|^{2\sigma} + |z_2|^{2\sigma})|z_1 - z_2|$

Expl : $g(z) = |z|^{2\sigma}z : |g'(z)| \leq C|z|^{2\sigma}$
 $+ |\alpha + \beta|^{2\sigma} \leq C(|\alpha|^{2\sigma} + |\beta|^{2\sigma})$

$$\begin{aligned}
&\leq C \| (|u|^{2\sigma} + |w|^{2\sigma}) \|_{L^p([L-\tau, \tau], L^q)} \|u - w\|_{L^{p'}([L-\tau, \tau], L^q)} \\
&\leq C (\|u\|_{L^p L^q}^{2\sigma} + \|w\|_{L^p L^q}^{2\sigma}) \|u - w\|_{L^p L^q} \\
&\leq C \tau^{2\sigma/\theta} 2 (2C_q \|u_0\|_2)^{2\sigma} \|u - w\|_{L^p L^q} \\
&\leq \frac{1}{2} \text{ si } 0 < \tau \ll 1.
\end{aligned}$$

Idem $\|\phi(u) - \phi(w)\|_{L^p([L-\tau, \tau], L^q)} \Rightarrow$ lemme

$$i\partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = |u|^{2\sigma} u : \text{formellement, } \frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 = 0$$

$\Rightarrow$ on peut appliquer le lemme un nombre infini de fois, ce qui donne la proposition (à l'unicité près).

NB: on part de L^2 (qui n'est pas une algèbre), et on résout une EDP NL inégalités de Strichartz.

Unicité: u, w sol. D'après leur régularité, on peut trouver $0 < \varepsilon \ll 1$ de sorte que $u, w \in X(\varepsilon)$.

Or pour $0 < \varepsilon \ll 1$, la sol. est unique dans $X(\varepsilon)$ (car sol. = point fixe de Φ) $\Rightarrow$ unicité dans la proposition.

4) Application 2: NLS critique L^2 avec données petites

Cas limite: $\sigma = \frac{2}{d}$ $i\partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \lambda |u|^{4/d} u ; u|_{t=0} = u_0$
 $\lambda \in \mathbb{R}$

Prop: $\exists \varepsilon > 0$ / si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\|u_0\|_2 \leq \varepsilon$, alors il existe une unique solution
 $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$
 $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Rq: on a vu que pour $d=1, \lambda < 0$, il peut y avoir explosion en temps fini: hyp. $\|u_0\|_2 \ll 1$ nécessaire dans ce cas.
 questions (encore) ouvertes: $\lambda > 0$ et $\|u_0\|_2$ qq?
 $\lambda < 0$: taille limite?

intégrabilité globale en temps.

Dém: on reprend l'approche du cas $\sigma < \frac{2}{d}$: $p = q = k = 2 + \frac{4}{d}$.
 (à détailler)

$$\begin{aligned} \|\phi(u)\|_{L^\infty_z L^2} &\leq \|u_0\|_2 + C_{2q} \|u\|_{L^q L^2}^{2\sigma+1} = \|u_0\|_2 + C_q \|u\|_{L^q L^2}^{1+4/d} \\ &\leq \|u_0\|_2 + C_{2q} (2C_q \|u_0\|_2)^{1+4/d} \\ &\leq \|u_0\|_2 \text{ si } \|u_0\|_2 \ll 1. \end{aligned}$$

idem $\|\phi(u)\|_{L^p_z L^q} \rightsquigarrow$ stabilité si $\|u_0\|_2 \ll 1$.

Contraction :

$$\begin{aligned} \|\phi(u) - \phi(w)\|_{L^\infty([-\tau, \tau]; L^2)} &\leq C_{2q} (\|u\|_{L^q L^2}^{2\sigma} + \|w\|_{L^q L^2}^{2\sigma}) \|u - w\|_{L^q L^2} \\ &\leq C_{2q} 2 (2C_q \|u_0\|_2)^{2\sigma} \|u - w\|_{L^q L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \text{ si } \|u_0\|_2 \ll 1 \end{aligned}$$

Idem $\|\phi(u) - \phi(w)\|_{L^p L^q}$.

Pour conclure : on ne voit jamais apparaître τ
 $\rightsquigarrow$ on peut appliquer ce raisonnement dans

$$X = \left\{ u \in C(\mathbb{R}; L^2) \cap L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}; L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^d)) \right\} /$$

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^2)} \leq 2 \|u_0\|_2$$

$$\|u\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \leq 2 C_{2+\frac{4}{d}} \|u_0\|_2 \quad \left. \vphantom{\|u\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}} \right\}$$

Unicité : soient u et w deux solutions : $u = \phi(u)$ et $w = \phi(w)$

$$\|u - w\|_{L^p([-\tau, \tau]; L^q)} = \|\phi(u) - \phi(w)\|_{L^p L^q} = \|\phi(u) - \phi(w)\|_{L^{2+\frac{4}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)}$$

$$\leq C_{2, 2+\frac{1}{d}} \left(\|u\|_{L^{2+\frac{1}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)}^{2\sigma} + \|w\|_{L^{2+\frac{1}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)}^{2\sigma} \right) \|u-w\|_{L^{2+\frac{1}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)}$$

Comme $u, w \in L^{2+\frac{1}{d}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ ($L^p_{loc}(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d))$ suffisait),

$$\|u\|_{L^{2+\frac{1}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)} + \|w\|_{L^{2+\frac{1}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

$$\Rightarrow \text{pour } 0 < \tau < 1, \|u-w\|_{L^{2+\frac{1}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2} \|u-w\|_{L^{2+\frac{1}{d}}([-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d)}$$

$$\Rightarrow u = w \text{ sur } [-\tau, \tau] \times \mathbb{R}^d.$$

On peut alors répéter l'opération sur $[0, \tau]$, puis $[\tau, 2\tau]$, etc., pour conclure $u = w$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

5) Application 3: NLS dans H^1

$$i \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u = \lambda |u|^{2\sigma} u ; u|_{t=0} = u_0$$

On suppose $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\text{Soit } \sigma : \sigma < \frac{2}{d-2} \text{ si } d \geq 3.$$

Explication: conservations

Formellement, $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{\lambda}{\sigma+1} \|u(t)\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}}_{\text{énergie potentielle}} \right) = 0$$

énergie cinétique énergie potentielle.

$$G.-N. : \|u\|_{L^{\sigma+2}} \leq C \|u\|_2^{1-\delta} \|\nabla u\|_2^{\delta}, \quad \delta = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma+2} \right) = \frac{d\sigma}{2\sigma+2}$$

$$\boxed{\text{Si}} \quad \sigma < \frac{2}{d-2}$$

Le cas $\sigma = \frac{2}{d-2}$ ($d \geq 3$) est plus difficile : comme le cas

$\sigma = \frac{2}{d}$ dans le cadre $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lemme $\exists \varepsilon > 0$ ne dépendant que de $\sigma, d, |\lambda|$ et $\|u_0\|_{H^1}$
 et une unique sol. $u \in C([- \varepsilon, \varepsilon], H^1) \cap L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([- \varepsilon, \varepsilon], L^{2\sigma+2})$
 avec $\nabla u \in L^{\frac{4\sigma+4}{d\sigma}}([- \varepsilon, \varepsilon], L^{2\sigma+2})$

Déf : $\mathcal{Y}(\varepsilon) = \left\{ u \in X(\varepsilon) / \begin{aligned} &\nabla u \in C([- \varepsilon, \varepsilon], L^2) \cap L^1([- \varepsilon, \varepsilon], L^1) \\ &\|\nabla u\|_{\infty([- \varepsilon, \varepsilon], L^2)} \leq 2\|\nabla u_0\|_2 \\ &\|\nabla u\|_{p, q} \leq 2C_{2\sigma+2}\|\nabla u_0\|_2 \end{aligned} \right\}$

• $p = \frac{4\sigma+4}{d\sigma}$, $q = 2\sigma+2$: (p, q) est admissible

• $\frac{1}{q'} = \frac{2\sigma+1}{q}$, $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2\sigma}{k}$, $k = \frac{4\sigma(\sigma+1)}{2-(d-2)\sigma}$

• $k < p \Leftrightarrow \sigma < 2/d$: si $2/d \leq \sigma < 2/d-2$, on a $k > p$.

1^{er} cas : $\sigma < 2/d$: on peut reprendre le calcul sous-critique L^2 .

Cas général :

$$\begin{aligned} \|\phi(u)\|_{\infty, L^2} &\leq \|u_0\|_2 + \| |u|^{2\sigma} u \|_{L^q, L^q} \leq \|u_0\|_2 + C \|u\|_{L^q, L^q}^{2\sigma} \|u\|_{L^q, L^q} \\ &\leq \|u_0\|_2 + C (2C_q \|u_0\|_2) \|u\|_{L^q, L^q}^{2\sigma} \end{aligned}$$

Rappel : Sobolev, $\|u(t)\|_q \leq C \|u(t)\|_H$

$$\begin{aligned} \|\phi(u)\|_{\infty, L^2} &\leq \|u_0\|_2 + C \|u\|_{L^q, H^1}^{2\sigma} \leq \|u_0\|_2 + C \varepsilon^{2\sigma/k} \|u\|_{\infty, H^1}^{2\sigma} \\ &\leq \|u_0\|_2 + C \varepsilon^{2\sigma/k} C(\|u_0\|_{H^1}). \end{aligned}$$

de même, $\|\phi(u)\|_{L^p_c L^q} \leq C_1 \|u_0\|_2 + C e^{2\sigma/k} C(\|u_0\|_{H^1})$.

Reste le gradient: $\phi(u)(t) = U_0(t)u - i\lambda \int_0^t U_0(t-s) (|u|^{2\sigma} u) ds$

$$\nabla \phi(u)(t) = U_0(t) \nabla u_0 - i\lambda \int_0^t U_0(t-s) \nabla (|u|^{2\sigma} u) ds$$

où on a utilisé $[\nabla, U_0(t)] = 0$: évident côté Fourier.

$$\|\nabla \phi(u)\|_{L^\infty L^2} \leq \|\nabla u_0\|_2 + |\lambda| C_{2,q} \|\nabla (|u|^{2\sigma} u)\|_{L^p_c L^q}$$

$$\leq \|\nabla u_0\|_2 + C \| |u|^{2\sigma} \nabla u \|_{L^p_c L^q}$$

$$\leq \|\nabla u_0\|_2 + C \|u\|_{L^p_c L^q}^{2\sigma} \|\nabla u\|_{L^p_c L^q}$$

$$\leq \|\nabla u_0\|_2 + C e^{2\sigma/k} C(\|u_0\|_{H^1})$$

$$\|\nabla \phi(u)\|_{L^p_c L^q} \leq C_1 \|\nabla u_0\|_2 + C e^{2\sigma/k} C(\|u_0\|_{H^1})$$

Cel: $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1 \Rightarrow \phi$ envoie $Y(\varepsilon)$ dans lui-même.

$\tilde{Y}$: on remplace C_ε par L^∞_c .

Remarque importante: $(\tilde{Y}(\varepsilon), \|\cdot\|_{L^p_c L^q})$ est complet.

En effet: u_n suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{L^p_c L^q} \Leftrightarrow u_n \text{ cv dans } L^p_c L^q$

$$\|u_n - u\|_{L^p_c L^q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$u_n \in$ boule de $L^\infty_c H^1$: une sous-suite cv $C_\varepsilon H^1$, ie

$$u_{\varphi(n)} \rightarrow v, \quad v \in C_\varepsilon H^1.$$

unicité (D'): $v = u$.

$\nabla u_n \in$ boule $L^p_c L^q$: idem

Cel: toute suite de Cauchy cv $(\|\cdot\|_{L^p_c L^q})$ vers un élément de $Y(\varepsilon)$.

Ainsi, il suffit de montrer la contraction pour $\| \cdot \|_{p, L^q}$.

$$\| \phi(u_1) - \phi(u_2) \|_{p, L^q} \leq C \| |u_1|^{2\sigma} u_1 - |u_2|^{2\sigma} u_2 \|_{p', L^{q'}}$$

comme dans le cas $\sigma < 2/d$:

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\|u_1\|_{L^2}^{2\sigma} + \|u_2\|_{L^2}^{2\sigma} \right) \|u_1 - u_2\|_{p, L^q} \\ &\leq C e^{2\sigma R} \left(\|u_1\|_{L^\infty H^1}^{2\sigma} + \|u_2\|_{L^\infty H^1}^{2\sigma} \right) \|u_1 - u_2\|_{p, L^q} \\ &\leq 1/2 \text{ si } C \ll 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ le schéma de Picard cv dans $\mathcal{Y}(c)$.

Prop: $\sigma > 0$ avec $\sigma < \frac{2}{d-2}$ si $d \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Il existe une unique sol. $u \in C([0, +\infty[, H^1) \cap L_{loc}^p(\mathbb{R}_+, L^q)$
avec $\nabla u \in L_{loc}^p([0, +\infty[, L^q)$ dans les cas suivants:

- . $\lambda \geq 0$
- . $\lambda < 0$ et $\sigma < 2/d$
- . $\lambda < 0$, $\sigma = \frac{2}{d}$ et $\|u_0\|_{L^2}$ assez petite
- . $\lambda < 0$, $\sigma > 2/d$ et $\|u_0\|_{H^1}$ assez petite

Dém: estimations a priori sur $\|u\|_{H^1}$. Partie L^2 OK $\Rightarrow \nabla u$ dans L^2 ?

- . $\lambda \geq 0$: énergie OK
- . $\lambda < 0$ et $\sigma < 2/d$: $\|u\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{2\sigma} \|u\|_{L^2}^{2+2-2\sigma} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{2\sigma}$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2|E| + C \|\nabla u\|_{L^2}^{2\sigma} \|u\|_{L^2}^{2+2-2\sigma} \xrightarrow{\|u\|_{L^2} \text{ petit}} \nabla u \in L^\infty H^1.$$

- . $\lambda < 0$ et $\sigma = 2/d$: $\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq 2|E| + \underbrace{C \|u_0\|^{4/d}}_{\leq 1/2 \text{ si } (\dots)} \|\nabla u\|_{L^2}^2$

$$\lambda < 0 \quad \sigma > 2/d: \| \nabla u \|_2^2 \leq 2|E| + C(\| \nabla u \|_2^2)^{d\sigma/2}$$

$$\sigma = \frac{d\sigma}{2} > 1 \quad E \xrightarrow{\|u\|_{H^1} \rightarrow 0} 0$$

Bootstrap ...